Муниципальное учреждение дополнительного профессионального образования
«Центр повышения квалификации и информационно-методической работы»
г. Магнитогорска
(МУ ДПО «ЦПКИМР» г. Магнитогорска)

# Комплект дидактических материалов для внеурочных занятий по математике в 5-7 классах
# (подготовка к олимпиадам и конкурсам)

Авторы сборника:
Абхаликова С.В., учитель математики МОУ «СОШ № 25 при МаГК»
Акбутина А.М., учитель математики МОУ «СОШ № 40»
Вараксина Е.В., учитель математики МОУ «СОШ № 5 УИМ»
Ганеева Л.Р., учитель математики МОУ «СОШ № 5 УИМ»
Городная Л.В., учитель математики МОУ «МГМЛ»
Козлова С.Н., учитель математики МОУ «СОШ № 12»
Лобай Д.А., учитель математики МОУ «СОШ № 25 при МаГК»
Малюкова Н.И., учитель математики МОУ «СШИ № 2»
Неясова Ю.В., учитель математики МОУ «СОШ № 25 при МаГК»
Нилова Н.А., учитель математики МАОУ «МЛ № 1»
Сунко Д.В., учитель математики МОУ «Гимназия № 18»
Тюлегенова А.Ж., учитель математики МОУ «СОШ № 56 УИМ»
Шонохова Е.Н., методист МУ ДПО «ЦПКИМР»

Магнитогорск

2024

# Содержание

# Введение

В данном комплекте дидактических материалов представлены математические задачи олимпиадной и конкурсной тематики для школьников 5- 7 классов для подготовки к различным математическим состязаниям. В комплекте рассматриваются задачи по блокам : логические, «на взвешивания», «на обратный ход», на чередование, на четность, нестандартные задачи, задачи про «рыцарей и лжецов», принцип Дирихле, задачи на применение симметричной стратегии, математическая индукция

В каждом блоке рассматриваются основные приемы и методы решения задач, представлена подборка ключевых задач и подборка задач для самостоятельного решения. Задачи для подготовки и проведения математических конкурсов и олимпиад способствуют развитию математического мышления, логики, творчества, повышению математической и общей культуры обучающихся. Комплект дидактических материалов можно использовать как на уроках математики, так и для организации внеурочной деятельности.

# 5-6 класс

# Логические задачи

Установление логической связи между предположением и выводом. Составление логических цепочек. Построение отрицания. Перебор случаев. Отбрасывание невозможных вариантов.

Основные приемы и методы решения логических задач:

- метод рассуждений;
- с помощью таблиц истинности;
- метод граф-схем;
- средствами алгебры логики (алгебры высказываний);
- графический (в том числе, «дерево логических условий», метод кругов Эйлера);

**Метод граф – схем**

**Задача 1**

Красный, синий, желтый и зеленый карандаши лежат в четырех коробках по одному. Цвет карандаша отличается от цвета коробки. Известно, что зеленый карандаш лежит в синей коробке, а красный не лежит в желтой. В какой коробке лежит каждый карандаш?

*Решение*

Обозначим точками карандаши и коробки. Сплошная линия будет обозначать, что карандаш лежит в соответствующей коробке, а пунктирная, что не лежит.

Далее достраиваем граф по следующему правилу: поскольку в коробке может лежать ровно один карандаш, то из каждой точки должны выходить одна сплошная линия и три пунктирные. Получается граф, дающий решение задачи.

**Задача 2**

Беседуют трое друзей: Белокуров, Чернов и Рыжов. Брюнет сказал Белокурову: «Любопытно, что один из нас белокурый, другой брюнет, третий рыжий, но, ни у кого цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос имеет каждый из друзей?

*Решение*

Построим граф отношения, заданного в условии задачи. Для этого, прежде всего, выделим множество фамилий М и множество цветов волос К, элементы которых будем обозначать точками. Точки множества М назовем буквами *Б, Ч, Р* (Белокуров, Чернов и Рыжов); точки второго множества - *б, бр, р* (белокурый, брюнет, рыжий). Если точке из одного множества соответствует точка из другого, мы их соединим сплошной линией, а если не соответствует - штриховой. Условие задачи указывает лишь на несоответствия.

Из условия задачи следует, что для каждой точки из множества М существует одна и только одна точка из множеств К, которая соответствует первой и, наоборот, каждой точке из множества К соответствует одна и только одна точка из множества М. Задача сводится к тому, чтобы найти это единственно возможное соответствие между элементами множеств М и К, т. е. к нахождению трех сплошных линий, соединяющих соответствующие точки множеств.

Принцип решения задачи прост. Если какая-то точка оказывается соединенной с двумя точками другого множества штриховыми линиями, то с его третьей точкой ее необходимо соединить сплошной линией. Поэтому граф на рисунке дополняется сплошными линиями, соединяющими точки *Б* и *р, Р* и *бр.* Далее остается соединить сплошной линией точку *Ч* и точку *б*, так как точка *Ч* соединена с точкой *бр* штриховой линией, а точка *р* уже «занята».

Таким образом, на графе автоматически прочитываем ответ: Белокуров - рыжий, Чернов - белокурый, Рыжов - брюнет.

В следующей задаче применение графов помогает обнаружить наличие двух решений.

**Задача 3**

Маша, Лида, Женя и Катя умеют играть на разных инструментах (виолончели, рояле, гитаре и скрипке), но каждая только на одном. Они же владеют разными иностранными языками (английским, французским, немецким и испанским), но каждая только одним. Известно, что:

1. девушка, которая играет на гитаре, говорит по-испански;
2. Лида не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка;
3. Маша не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка;
4. девушка, которая говорит по-немецки, не играет на виолончели;
5. Женя знает французский язык, но не играет на скрипке.

Кто на каком инструменте играет и какой иностранный язык знает?

<u>*Решение*</u>

Проведем последовательно следующие сплошные отрезки: КС, ВЖ, ВФ, АК. Тем самым образуются два «сплошных» треугольника ЖВФ и КСА. Проводим еще сплошной отрезок РН. Теперь убеждаемся, что условия задачи не обеспечивают однозначности выбора третьей точки для каждой из пар РН и ГИ. Возможны следующие варианты «сплошных» треугольников: МГИ и ЛРН или ЛГИ и МРН. Таким образом, задача имеет два решения.

## Метод рассуждений

**Задача 4**

Перед началом Турнира Четырех болельщики высказали следующие предположения по поводу своих кумиров:

А) Макс победит, Билл – второй;
В) Билл – третий, Ник – первый;
С) Макс – последний, а первый – Джон.

Когда соревнования закончились, оказалось, что каждый из болельщиков был прав только в одном из своих прогнозов. Какое место на турнире заняли Джон, Ник, Билл, Макс? (В ответе перечислите подряд без пробелов места участников в указанном порядке имен.)

*Ответ: Джон – 3 , Ник – 1, Билл – 2, Макс – 4; 3124*

**Задача 5**

Классный руководитель пожаловался директору, что у него в классе появилась компания из 3-х учеников, один из которых всегда говорит правду, другой всегда лжет, а третий говорит через раз то ложь, то правду. Директор знает, что их зовут Коля, Саша и Миша, но не знает, кто из них правдив, а кто – нет. Однажды все трое прогуляли урок астрономии. Директор знает, что никогда раньше никто из них не прогуливал астрономию. Он вызвал всех троих в кабинет и поговорил с мальчиками. Коля сказал: «Я всегда прогуливаю астрономию. Не верьте тому, что скажет Саша». Саша сказал: «Это был мой первый прогул этого предмета». Миша сказал: «Все, что говорит Коля, – правда». Директор понял, кто из них кто. Расположите первые буквы имен мальчиков в порядке: «говорит всегда правду», «всегда лжет», «говорит правду через раз». (Пример: если бы имена мальчиков были Рома, Толя и Вася, ответ мог бы быть: РТВ***)***

*Ответ: СКМ (Саша – правдив, Коля – лжец, Миша – «полу-лжец»).*

**Задача 6**

Мама, прибежавшая на звон разбившейся вазы, застала всех трех своих сыновей в совершенно невинных позах: Саша, Ваня и Коля делали вид, что происшедшее к ним не относится. Однако футбольный мяч среди осколков явно говорил об обратном.

– Кто это сделал? – спросила мама.

– Коля не бил по мячу, – сказал Саша. – Это сделал Ваня.

Ваня ответил: – Разбил Коля, Саша не играл в футбол дома.

– Так я и знала, что вы друг на дружку сваливать будете, рассердилась мама. Ну, а ты что скажешь? – спросила она Колю.

– Не сердись, мамочка! Я знаю, что Ваня не мог этого сделать. А я сегодня еще не сделал уроки, – сказал Коля.

Оказалось, что один из мальчиков оба раза солгал, а двое в каждом из своих заявлений говорили правду. Кто разбил вазу?

*Ответ: вазу разбил Коля*

**Задача 7**

Произошло ограбление банка. Допросили только трёх свидетелей ограбления банка, и они сообщили следующие сведения о грабителе: цвет волос и особые приметы. Первый свидетель утверждал, что грабитель был брюнет, а на его лице были тёмные очки. Второй сказал, что грабитель был шатен, и что у него была борода, а третий свидетель уточнил, что грабитель точно не был брюнетом и, по всей видимости, был в шляпе. Когда удалось взять грабителя, выяснилось, что каждый из свидетелей точно определил либо цвет волос, либо особую примету грабителя. Определите цвет волос преступника и особую примету.

*Ответ: Грабитель был шатен, в очках. , 6 человек*

**Задача 8**

Для пикника сладкоежка Маша взяла в трёх одинаковых коробках конфеты, печенье и торт. На коробках были этикетки: Конфеты», «Печенье», «Торт». Но Маша знала, что мама любит шутить и всегда кладёт продукты в коробки, надписи на которых не соответствуют их содержимому. Маша была уверена, что конфеты не лежат в коробке, на которой написано «Торт». В каких коробках лежат продукты?

*Ответ: Конфеты* - *в «Печенье», печенье* - *в «Торт», Торт – в «Конфеты»*

**Задача 9**

На предприятии есть три цеха – А, В, С, договорившиеся о порядке утверждения проектов, а именно:

1. Если цех В не участвует в утверждении проекта, то в этом утверждении не участвует и цех А.

2. Если цех В принимает участие в утверждении проекта, то в нем принимают участие цехи А и С.

Обязан ли при этих условиях цех С принимать участие в утверждении проекта, когда в утверждении принимает участие цех А?

*Ответ: Первое утверждение можно переформулировать следующим образом: если в утверждении участвует цех А, то цех В также должен участвовать. Тогда, согласно второму утверждению, цех С должен принимать участие в утверждении проекта.*

## Метод «Круги Эйлера»

**Задача 10** *(Любимые мультфильмы)*

Среди школьников шестого класса проводилось анкетирование по любимым мультфильмам. Самыми популярными оказались три мультфильма: «Белоснежка и семь гномов», «Губка Боб Квадратные Штаны», «Волк и теленок». Всего в классе 38 человек. «Белоснежку и семь гномов» выбрали 21 ученик, среди которых трое назвали еще «Волк и теленок», шестеро – «Губка Боб Квадратные Штаны», а один написал все три мультфильма. Мультфильм «Волк и теленок» назвали 13 ребят, среди которых пятеро выбрали сразу два мультфильма. Сколько человек выбрали мультфильм «Губка Боб Квадратные Штаны»?

*Ответ. 17 человек выбрали мультфильм «Губка Боб Квадратные Штаны».*

**Задача 11** *(Мир музыки)*

В магазин «Мир музыки» пришло 35 покупателей. Из них 20 человек купили новый диск певицы Максим, 11 – диск Земфиры, 10 человек не купили ни одного диска. Сколько человек купили диски и Максим, и Земфиры?

*Ответ: 6 покупателей купили диски и Максим, и Земфиры.*

**Задача 12** *(Гарри Поттер, Рон и Гермиона)*

На полке стояло 26 волшебных книг по заклинаниям, все они были прочитаны. Из них 4 прочитал и Гарри Поттер, и Рон. Гермиона прочитала 7 книг, которых не читали ни Гарри Поттер, ни Рон, и две книги, которые читал Гарри Поттер. Всего Гарри Поттер прочитал 11 книг. Сколько книг прочитал только Рон?

*Ответ: 8 книг прочитал только Рон.*

**Задача 13** *(Пионерский лагерь)*

В пионерском лагере 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок и хор. Сколько ребят не поют, не увлекаются спортом, не занимаются в драмкружке? Сколько ребят заняты только спортом?

*Ответ: 5 человек заняты только спортом.*

**Задача 14** (*Экстрим)*

Из 100 ребят, отправляющихся в детский оздоровительный лагерь, кататься на сноуборде умеют 30 ребят, на скейтборде – 28, на роликах – 42. На скейтборде и на сноуборде умеют кататься 8 ребят, на скейтборде и на роликах – 10, на сноуборде и на роликах – 5, а на всех трех – 3. Сколько ребят не умеют кататься ни на сноуборде, ни на скейтборде, ни на роликах***?***

*Ответ: 20 человек не умеют кататься ни на одном спортивном снаряде.*

**Задача 1**5 (*Увлечения)*

Многие ребята нашего класса любят футбол, баскетбол и волейбол. А некоторые - даже два или три из этих видов спорта. Известно, что 6 человек из класса играют только в волейбол, 2 – только в футбол, 5 – только в баскетбол. Только в волейбол и футбол умеют играть 3 человека, в футбол и баскетбол – 4, в волейбол и баскетбол – 2. Один человек из класса умеет играть во все игры, 7 не умеют играть ни в одну игру. Требуется найти:

1. Сколько всего человек в классе? *(Ответ: 30 всего человек в классе*)
2. Сколько человек умеют играть в футбол? *(Ответ: Умеют играть в футбол 10)*
3. Сколько человек умеют играть в волейбол? *(Ответ: Умеют играть в волейбол: 12*)

**Задача 16** *(Танцы и музыка*)

11 девочек из класса занимаются танцами. 9 – занимаются музыкой. 6 девочек занимаются и танцами, и музыкой. 4 девочки не занимаются ни танцами, ни музыкой. Сколько девочек занимаются только танцами и только музыкой? Сколько в классе девочек?

*Ответ: 5 девочек занимаются только танцами, 3 девочки занимаются только музыкой, 18 девочек всего в классе.*

**Задача 17** *(Магазин)*

В магазине побывало 65 человек. Известно, что они купили 35 холодильников, 36 микроволновок, 37 телевизоров. 20 из них купили и холодильник и микроволновку, 19 - и микроволновку, и телевизор, 15-холодильник и телевизор, а все три покупки совершили три человека. Был ли среди них посетитель, не купивший ничего?

*Ответ: 7 посетителей магазина не купили ничего.*

**Задача 18** *(Кружки)*

В классе 36 человек. Ученики этого класса посещают математический, физический и химический кружки, причем математический кружок посещают 18 человек, физический — 14, химический — 10. Кроме того, известно, что 2 человека посещают все три кружка, 8 человек —.и математический, и физический, 5 — и математический, и химический, 3 — и физический, и химический кружки. Сколько учеников класса не посещают никакие кружки?

*Ответ: в классе 8 ребят, не посещающих никаких кружков.*

**Задача 19** *(Иностранные языки)*

Из 100 туристов, отправляющихся в заграничное путешествие, немецким языком владеют 30 человек, английским - 28, французским - 42. Английским и немецким одновременно владеют 8 человек, английским и французским - 10, немецким и французским - 5, всеми тремя языками - 3. Сколько туристов не владеют ни одним языком?

*Ответ: 20 человек не владеют ни одним из данных языков.*

**Задача 20** *(Задача «Кубики», решаемая с помощью диаграммы Эйлера – Венна)*

Ребятам поручили изготовить кубики. Несколько кубиков сделали из картона, а остальные из дерева. Кубики были двух размеров: большие и маленькие. Часть из них покрасили в зеленый цвет, другую – в красный. Получилось 16 зеленых кубиков. Зеленых кубиков большого размера было 6. Больших зеленых из картона было 4. Красных кубиков из картона было 8,красных кубиков из дерева – 9. Больших деревянных кубиков было 7, а маленьких деревянных кубиков было 11. Сколько же всего получилось кубиков?

*Решение.*

Выполняем рисунок.

Заполняем диаграмму.

1) Надо начинать с того подмножества, для которого указаны три свойства. Это большие зеленый кубики из картона – таких кубиков 4.

2) Далее ищем подмножества, для которого указаны два свойства из перечисленных трех. Это большие зеленые кубики – 6. Но это подмножество состоит из картонных и деревянных. Картонных было 4. Значит, деревянных 6-4=2.

3) Больших деревянных кубиков 7. Из них зеленых – 2. Значит, красных будет 7-2=5.

## Метод таблиц

**Задача 21**

В кафе встретились три друга: скульптор Белов, скрипач Чернов и художник Рыжов. “Замечательно, что один из нас имеет белые, один черные и один рыжие волосы, но ни у одного из нас нет волос того цвета, на который указывает его фамилия”, - заметил черноволосый. “Ты прав”, - сказал Белов. Какой цвет волос у художника?

*Ответ: художник брюнет.*

**Задача 22**

Три подруги вышли в белом, зеленом и синем платьях. Их туфли тоже были белого, зеленого и синего цветов. Известно, что только у Ани цвет платья и туфель совпадали. Ни платье, ни туфли Вали не были белыми. В туфлях какого цвета была Наташа?

*Ответ: Наташа была в зеленых туфлях. Аня: белое платье и туфли, Валя: синие туфли и зеленое платье, Наташа: зеленые туфли и синее платье.*

**Задача 23**

В школе учатся четыре талантливых подростка: Иван, Петр, Алексей и Андрей. Один из них — будущий хоккеист, другой преуспел в футболе, третий — легкоатлет, четвертый подает надежды как баскетболист.

О них известно следующее:

1. Иван и Алексей присутствовали в спортзале, когда там занимался легкоатлет.
2. Петр и хоккеист вместе были на тренировке баскетболиста.
3. Хоккеист раньше дружил с Андреем, а теперь неразлучен с Иваном
4. Иван незнаком с Алексеем, так как они учатся в разных классах и в разные смены.

Кто чем увлекается?

*Ответ: Иван— футболист, Петр— легкоатлет, Алексей —хоккеист, а Андрей — баскетболист.*

**Задача 24**

Три друга — Алеша, Боря и Витя — учатся в одном классе. Один из них ездит домой из школы на автобусе, другой — на трамвае, третий — на троллейбусе. Однажды после уроков Алеша пошел проводить своего друга до остановки троллейбуса. Когда мимо них проходил автобус, третий друг крикнул из окна: “Боря, ты забыл в школе тетрадку!”. Кто на чем ездит домой?

*Ответ: Алёша на трамвае, Боря на троллейбусе, Витя на автобусе.*

**Задача 25**

Каникулы в школе птиц и зверей начались большим карнавалом. Медведь, волк, лиса и заяц явились в маскарадных костюмах волка, медведя, лисы и зайца. На балу зверь в маскарадном костюме зайца выиграл в лотерее банку меда и остался этим очень недоволен. Известно также, что медведь не любит лису и никогда не берет в лапы картинок, где она нарисована. Зверь в маскарадном костюме лисы выиграл в лотерее пучок моркови, но это тоже не доставило ему никакой радости. Не могли бы вы сказать, какой маскарадный костюм смастерил себе каждый из зверей?

*Ответ: Медведь – волка, лиса – зайца, волк – лисы, заяц – медведя.*

**Задача 26**

В авиационном подразделении служат Потапов, Щедрин, Семенов, Коновалов и Самойлов. Их специальности (они перечислены не в том же порядке, что и фамилии): пилот, штурман, бортмеханик, радист и синоптик. Об этих людях известно следующее:

- Щедрин и Коновалов не умеют управлять самолетом.
- Потапов и Коновалов готовятся стать штурманами.
- Щедрин и Самойлов живут в одном доме с радистом.
- Семенов был в доме отдыха вместе со Щедриным и сыном синоптика.
- Потапов и Щедрин в свободное время любят играть в шахматы с бортмехаником.
- Коновалов, Семенов и синоптик увлекаются боксом.
- Радист боксом не увлекается.

*Ответ: Потапов – радист, Щедрин – штурман, Семёнов – пилот, Коновалов – бортмеханик, Самойлов – синопти).*

**Задача 27**

В течение последних четырех лет Алексеев, Фомин, Дементьев и Иванов получали очередной отпуск в мае, июне, июле или в августе. Причем, если один из них отдыхал в мае, то другой - в июне, третий – в июле, а четвертый – в августе. Каждый их них получал отпуск в эти четыре года в разные месяцы. Так в первый год Дементьев отдыхал в июле, во второй год – в августе. Алексеев во второй год отдыхал в мае, Иванов в третий год – в июне, а Фомин в четвертый год – в июле.

Кто в каком месяце отдыхал в каждом из этих четырех лет?

*Ответ:*

| | *1–й год* | *2 –й год* | *3 –й год* | *4 –й год* |
|---|---|---|---|---|
| *Алексеев* | *июнь* | *май* | *июль* | *август* |
| *Фомин* | *май* | *июнь* | *август* | *июль* |
| *Дементьев* | *июль* | *август* | *май* | *июнь* |
| *Иванов* | *август* | *июль* | *июнь* | *май* |

**Задача 28**

Три друга – спортсмена - Алеша, Вася и Сережа – учились в одном классе. Каждый из них увлекался двумя видами спорта из следующих шести: футбол, волейбол, баскетбол, теннис, плавание и велоспорт. Известно, что:

- все трое – Сережа, теннисист и пловец ходят из школы домой вместе,
- пловец и футболист – соседи по дому,
- Алеша самый старший из троих, а теннисист старше велосипедиста,
- Наиболее интересные спортивные передачи по телевизору все трое – Алеша, велосипедист и волейболист – смотрят вместе.

Надо узнать, кто каким спортом увлекается.

*Ответ. Алеша – баскетбол и плавание, Вася – волейбол и теннис, Сережа – футбол и велоспорт.*

**Задача 29**

На школьном вечере четыре юноши: Валентин, Николай, Владимир и Алексей все из разных классов, и их одноклассницы танцевали танец, но каждый юноша танцевал не своей одноклассницей.

Лена танцевала с Валентином, Аня – с одноклассником Наташи, Николай - с одноклассницей Владимира, а Владимир танцевал с Олей.

Кто с кем танцевал?

*Ответ: Танцевали Лена с Валентином, Оля с Владимиром, Аня с Николаем, Наташа с Алексеем. Учатся в одних классах Аня и Владимир, Оля и Валентин, Лена и Алексей, Наташа и Николай.*

**Задача 30** *(Сокровища)*

Три пирата: Нытик, Стрелец и Барс зарыли свои сокровища на одном острове. Один из них зарыл возле дерева лимона, другой – банана, а третий – абрикоса. Ёмкость для хранения тоже у каждого была своя: один использовал сундучок, второй – большую морскую ракушку, а третий – кожаный мешочек.

Определите имя пирата, а также где и чем хранил свои сокровища каждый из них, если известно, что:

1. Ракушку использовал не Нытик.
2. Тот, кто закопал сокровища под абрикосом, использовал мешочек.
3. Барс закопал сундучок, но не под лимоном.

*Ответ:*

| имя | дерево | тара |
|---|---|---|
| Нытик | абрикос | мешочек |
| Стрелец | лимон | ракушка |
| Барс | банан | сундучок |

**Задача 31** *(Задача «В купе поезда»)*

В купе одного из вагонов поезда «Москва-Одесса» ехали москвич, петербуржец, туляк, киевлянин, харьковчанин и одессит. Их фамилии начинались с букв «А», «Б», «В», «Г», «Д», «Е». В дороге выяснилось, что:

1) А. и москвич — врачи;
2) Д. и петербуржец — учителя;
3) В. и туляк — инженеры;
4) Б. и Е. — участники Великой Отечественной войны, а туляк в армии совсем не служил;
5) харьковчанин старше А.;
6) одессит старше В.;
7) Б. и москвич сошли в Киеве;
8) В. и харьковчанин сошли в Виннице.

Определите профессию и место жительства каждого из пассажиров.

*Ответ: А. — одессит, врач; Б. — петербуржец, учитель; В. — киевлянин, инженер; Г. — туляк, инженер; Д. — харьковчанин, учитель; Е. — москвич, врач.*

**Задача 32**

В симфонический оркестр приняли на работу трёх музыкантов: Брауна, Смита и Вессона, умеющих играть на скрипке, флейте, альте, кларнете, гобое и трубе.

Известно, что:

- Смит самый высокий;
- играющий на скрипке меньше ростом играющего на флейте;
- играющие на скрипке и флейте и Браун любят пиццу;
- когда между альтистом и трубачом возникает ссора, Смит мирит их;
- Браун не умеет играть ни на трубе, ни на гобое.

Кто и на каких инструментах играет?

*Ответ: Браун – альт и кларнет, Смит – флейта и гобой, Вессон – скрипка и труба.*

**Задача 33**

Три одноклассника — Влад, Тимур и Юра, встретились спустя 10 лет после окончания школы. Выяснилось, что один из них стал врачом, другой физиком, а третий юристом. Один полюбил туризм, другой бег, страсть третьего — регби.

Юра сказал, что на туризм ему не хватает времени, хотя его сестра — единственный врач в семье, заядлый турист. Врач сказал, что он разделяет увлечение коллеги. Забавно, но у двоих из друзей в названиях их профессий и увлечений не встречается ни одна буква их имен. Определите, кто чем любит заниматься в свободное время и у кого какая профессия.

*Ответ: Юра – физик (бег), Тимур – врач (туризм), Влад – юрист (регби).*

**Задача 34**

Три дочери писательницы Дорис Кей — Джуди, Айрис и Линда, тоже очень талантливы. Они приобрели известность в разных видах искусств — пении, балете и кино. Все они живут в разных городах, поэтому Дорис часто звонит им в Париж, Рим и Чикаго.

Известно, что:

- Джуди живет не в Париже, а Линда — не в Риме;
- парижанка не снимается в кино;
- та, кто живет в Риме, певица;
- Линда равнодушна к балету.

Где живет Айрис, и какова ее профессия?

*Ответ: Джуди – певица (Чикаго), Айрис – балерина (Париж), Линда – киноактриса (Чикаго).*

**Задача 35**

После традиционного вечера встречи с бывшими выпускниками школы в стенгазете появилась заметка о трех бывших учениках школы. В этой заметке было написано, что Иван, Борис и Андрей стали учителями. Теперь они преподают разные дисциплины: один – математику, второй – физику, третий – химию. Живут они тоже в разных городах: Минске, Витебске и Харькове. В заметке было еще написано, что первоначальные их планы осуществились не полностью: Иван работает не в Минске, Андрей – не в Витебске; житель Минска преподает не математику, Андрей преподает не физику. Повезло только жителю Витебска: он преподает любимую им химию.

Кто есть кто?

*Ответ: Иван – химик – Витебск, Борис - физик – Минск, Андрей - математик – Харьков.*

**Задача 36**

Арташ, Отар, Гурам и Сурен занимаются в разных спортивных секциях. Один из них играет в баскетбол, другой – в волейбол, третий – в футбол, четвертый – в теннис. У них различные увлечения: один из них любит кино, другой – театр, третий – эстраду, а четвертый – цирк. Арташ не играет ни в волейбол, ни в баскетбол. Отар играет в футбол и любит театр. Сурен не играет в волейбол. Тот из ребят, кто играет в волейбол, любит ходить в кино, а тот, кто играет в баскетбол, не любит цирк.

Какое у каждого из них увлечение, и каким видом спорта занимается каждый?

*Ответ: Арташ – теннис – цирк, Отар – футбол – театр, Гурам – волейбол – кино, Сурен – баскетбол – эстрада.*

**Задача 37** *(Первоклашки)*

Год назад с нашего двора первый раз в первый класс пошли 5 мальчиков. Их имена: Петя, Коля, Ваня, Гена и Миша. Получилось так, что все пятеро попали в разные классы: один в класс “А”, другой – в “Б”, третий – в “В”, четвертый - в “Г”, пятый – в “Д”. Каждому из ребят досталась в качестве классного руководителя добрая учительница: Лидия Михайловна, Елена Анатольевна. Екатерина Кирилловна. Татьяна Григорьевна и Виктория Николаевна. Дети учились прекрасно, напротив их фамилий (Анисин, Белов, Кукушкин, Степанов и Харитонов) всегда были практически одни пятерки.

Определите имя, фамилию, класс и добрую учительницу для каждого из первоклашек, если известно, что

1. Ваня учится у Татьяны Григорьевны и его фамилия не Степанов.
2. В классе “Д” преподает не Екатерина Кирилловна.
3. Коля учится в классе “Б”. Он старше на 1месяц, чем Белов, и младше на 12 дней, чем тот, кто учится у Татьяны Григорьевны.
4. Елена Анатольевна преподает в классе “Г” и у нее нет ученика по фамилии Белов.
5. Харитонов Гена дружит с Петей и с тем, кто ходит в класс “А”.
6. Кукушкин учится в классе “А”. Его учительница не Лидия Михайловна и не Екатерина Кирилловна.
7. Анисин учится в классе “В” и его имя не Петя и не Миша.

**Задача 38**

На математическую олимпиаду в город Киров поехало четыре девятиклассника: Лева, Коля, Миша и Петя. В первый день они решили позавтракать в разных местах: один пошел в кафе, другой – в столовую, третий – в закусочную, четвертый – в буфет. После завтрака они снова собрались вместе. Разговор, естественно, зашел о том, кто как позавтракал. Выяснилось, что все они пили разные напитки, так как в каждом из этих мест, где они завтракали, оказалось в наличии только по одному напитку: в одном месте – только кофе, в другом – только молоко, в третьем – только ряженка, в четвертом – только чай. В буфете, например, было только молоко, а в столовой не было ряженки. Петя рассказал, что он был в столовой, но пил там не чай. Лева рассказал, что он пил ряженку, а Миша сказал, что он не был ни в закусочной, ни в буфете.

Кто из ребят где завтракал и что пил?

*Ответ: Лева – закусочная – ряженка, Коля – буфет – молоко, Миша – кафе – чай, Петя – столовая – кофе.*

**Задача 39**

В начале учебного года пятиклассники избрали старосту, председателя совета отряда, звеньевых первого, второго и третьего звеньев. Их имена: Аня, Боря, Вася, Гриша и Дина. Звеньевая первого звена решила подружиться со звеньевой второго звена. Дина удивилась, узнав, что председатель совета отряда и звеньевая второго звена брат и сестра. Гриша дружит с председателем совета отряда и со старостой. У Васи нет сестер.

Назовите имена каждого из избранных.

*Ответ: Вася – староста, Боря – председатель отряда, Дина – звеньевая 1 –го звена, Аня – 2-го звена, Гриша - 3-го звена.*

**Задача 40**

Петя, Гена, Дима и Вова занимаются в детской спортивной школе в разных секциях: гимнастической, баскетбольной, волейбольной и легкой атлетики. Петя, Дима и волейболист занимаются в одном классе. Петя и Гена на тренировки ходят пешком вместе, а гимнаст ездит на автобусе. Легкоатлет не знаком ни с баскетболистом, ни с волейболистом.

Кто в какой секции занимается?

*Ответ: Петя – баскетболист, Гена – волейболист, Дима – гимнаст. Вова – легкоатлет.*

**Задача 41**

Пять человек живут в одном городе. Их имена: Леонид, Владимир, Николай, Олег и Петр. Их Фамилии: Степанов, Борисов, Козин, Дроздов и Истомин. Известно, что

- Козин знаком только с двумя, а с Козиным знаком только один человек,
- Петр знаком со всеми, кроме одного, а Леонид знает только одного из всех,
- Николай и Истомин знают друг друга с детства.
- Владимир, Николай и Олег знакомы между собой,
- Дроздов и Владимир незнакомы,
- Олег, Николай и Борисов Часто вместе ходят на работу,

Назовите имена и фамилии каждого.

*(Ответ: Борисов Владимир, Степанов Николай, Козин Леонид, Дроздов Петр. Истомин Олег.*

**Задача 42**

По кругу сидят Иванов, Петров, Марков и Карпов. Их имена Андрей, Сергей, Тимофей, Алексей. Известно, что Иванов не Андрей и не Алексей. Сергей сидит между Марковым и Тимофеем. Петров сидит между Карповым и Андреем.

Как зовут Иванова, Петрова, Маркова и Карпова?

*Ответ: Иванов Сергей, Петров Алексей, Марков Андрей, Карпов Тимофей.*

**Задача 43**

Однажды на отдыхе за круглым столом оказались пятеро ребят родом из Москвы, Петербурга, Новгорода, Перми и Томска: Юра, Толя, Алёша, Коля и Витя. Москвич сидел между томичём и Витей, петербуржец – между Юрой и Толей, а напротив него сидели пермяк и Алёша. Коля никогда не был в Петербурге, а Юра не бывал в Москве и Томске, а томич с Толей регулярно переписываются.

Определите, в каком городе живёт каждый из ребят.

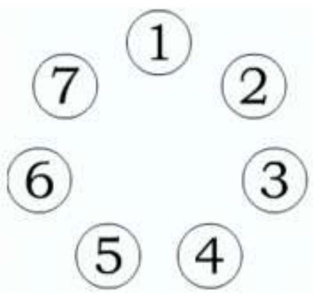
*Ответ: Юра из Новгорода, Толя из Москвы, Алёша из Томска, Коля из Перми, Витя из Петербурга.*

## Задачи на взвешивания

Задачи на взвешивания – это задачи на нахождение фальшивой монеты в куче настоящих, задачи на нахождение потерянного предмета, задачи на упорядочение предметов по массе с помощью взвешиваний на чашечных весах без гирь, а также задачи, где при решении используются весы с гирями или со стрелкой.

**Задача 1** *(взвешивание на чашечных весах без гирь).*

*Семь монет расположены по кругу. Известно, что какие-то четыре из них, идущие подряд, – фальшивые и что каждая фальшивая монета легче настоящей. Объясните, как найти две фальшивые монеты за одно взвешивание на чашечных весах без гирь.* ***(Все фальшивые монеты весят одинаково.)***




*Решение*

Заметим, что три настоящие монеты также лежат подряд. Занумеруем монеты по кругу, например, двигаясь по часовой стрелке, числами от 1 до 7.

Предложим два способа взвешивания.

*Первый способ.* На одну чашу весов положим монеты с номерами 1 и 2, а на другую – монеты с номерами 4 и 5. При таком взвешивании все четыре фальшивые монеты не могут оказаться на весах и при этом настоящих монет на весах – не более двух.

Рассмотрим два случая.

1) Одна из чаш легче. Тогда на ней *обе монеты фальшивые*.

2) Весы находятся в равновесии. Тогда на каждой чаше весов – одна фальшивая монета и одна настоящая.

Следовательно, монеты 6 и 7 – фальшивые.

*__Второй способ.__* На одну чашу весов положим монету № 1, а на другую – монету № 4. Возможны три случая.

1) Весы оказались в равновесии. Тогда *обе монеты на чашах – фальшивые*. 2) Монета № 1 легче, чем монета № 4. Тогда *монета № 1 – фальшивая*, а №4 – настоящая. Значит, и *монета 7* – также *фальшивая*. 3) Монета № 1 тяжелее, чем монета № 4. Тогда монета № 1 – настоящая. Следовательно, *монеты 4 и 5 – фальшивые*.

**Задача 2** *(разделение с помощью взвешиваний на чашечных весах без гирь)***.**

Как при помощи чашечных весов без гирь разделить 24 кг гвоздей на две части — 9 и 15 кг?

*__Решение__*

Отвешиваем 12 кг гвоздей и откладываем их в сторону. От оставшихся 12 кг отвешиваем 6 кг и откладываем их в другую сторону. От оставшихся 6 кг отвешиваем 3 кг и соединяем их с отложенными 6 кг. Получаем искомые 9 кг гвоздей.

**Задача 3** *(взвешивание на чашечных весах с гирями).*

Золотоискатель Джек добыл 9 кг песка. Сможет ли он за три взвешивания отмерить 2 кг песка с помощью двух чашечных весов с двумя гирями – 200 г и 50 г?

*__Решение__*

Первым взвешиванием делим песок на две кучки по 4500 г, вторым – одну из этих кучек на две кучки по 2250 г, и, наконец, от одной из этих кучек с помощью гирь отсыпаем 250 г.

*Ответ: сможет.*

**Задача 4**

Из набора гирек с массами 1, 2, ..., 101 г потерялась гирька массой 19 г. Можно ли оставшиеся 100 гирек разложить на две кучки по 50 гирек в каждой так, чтобы массы обеих кучек были одинаковы?

*__Подсказка__*

Попробуйте начать с того, чтобы положить в первую кучку гирьки массой 101 и 1 г, а во вторую — массой 100 и 2 г.

*__Решение__*

Положим в первую кучку две гирьки массой 101 г и 1 г, а во вторую — 100 г и 2 г; затем в первую две гирьки — 99 г и 3 г, а во вторую — 98 г и 4 г.

Так будем действовать, пока не положим во вторую кучку гирьки в 84 г и 18 г. К этому моменту в каждой кучке будет лежать по 18 гирек.

Теперь положим в первую кучку две гирьки массой 83 г и 20 г, а во вторую — 82 г и 21 г. Так будем продолжать до тех пор, пока во вторую кучку не придётся положить последнюю пару гирек массой 52 г и 51 г.

*Ответ: Да.*

**Задача 5**

Золотоискатель Джек добыл 9 кг золотого песка. Сможет ли он за три взвешивания отмерить 2 кг песка с помощью чашечных весов: а) с двумя гирями — 200 г и 50 г; б) с одной гирей 200 г?

*__Подсказка__*

Попробуйте начать с деления песка на две равные части.

*__Решение__*

Первый случай (гири 200 г и 50 г). 1е взвешивание: 4,5 кг= 4,5 кг. 2е: 2,25 кг= 2,25 кг. 3е: 2,25 кг= 2 кг+200 г+50 г.

Второй случай (гиря 200 г). 1е взвешивание: 4,6 кг= 4,4 кг + 200 г. 2е: 4,4 кг= 2,2 кг+2,2 кг. 3е: 2,2 кг= 2 кг+200 г.

*Ответ: Сможет в обоих случаях.*

**Задача 6**

Как при помощи чашечных весов без гирь разделить 24 кг гвоздей на две части — 9 и 15 кг?

*Подсказка*

Попробуйте отвесить сначала 12 кг, затем — 6 кг, затем — 3 кг.

*Решение*

Отвешиваем 12 кг гвоздей и откладываем их в сторону. От оставшихся 12 кг отвешиваем 6 кг и откладываем их в другую сторону. От оставшихся 6 кг отвешиваем 3 кг и соединяем их с отложенными 6 кг. Получаем искомые 9 кг гвоздей.

*Ответ: Отвешиваем 12 кг; от них отвешиваем 6 кг и откладываем; от оставшихся 6 кг отвешиваем 3 кг и соединяем их с отложенными 6 кг.*

**Задача 7**

Имеются чашечные весы без гирь и 3 одинаковые по внешнему виду монеты, одна из которых фальшивая: она легче настоящих (настоящие монеты одного веса).

Сколько надо взвешиваний, чтобы определить фальшивую монету?

*Подсказка*

При поиске фальшивой монеты среди трех монет, попробуйте положить на каждую чашку весов по одной монете.

*Решение*

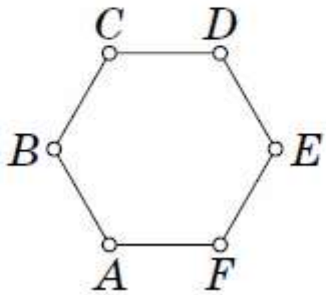
Нам будет достаточно 1-го взвешивания. Кладем на каждую чашку весов по монете. Если одна из чашек легче, то фальшивая монета на ней. Если весы в равновесии, значит фальшивая монета та, которую не положили на весы.

*Ответ: одно взвешивание.*

**Задача 8**

В вершинах шестиугольника ABCDEF (см. рис.) лежали 6 одинаковых на вид шариков: в A — массой 1 г, в B — 2 г, ..., в F — 6 г. Шутник поменял местами два шарика в противоположных вершинах. Имеются двухчашечные весы, позволяющие узнать, в какой из чаш масса шариков больше.

Как за одно взвешивание определить, какие именно шарики переставлены?




*Решение*

Положим на левую чашу весов шарики из вершин A и E, а на правую — из вершин B и D. Если шутник поменял местами шарики в вершинах A и D, то на левой чаше будет лежать груз массой 4 + 5 = 9 грамм, а на правой — 1 + 2 = 3 грамма, и левая чаша перевесит.

Если он поменял местами шарики в вершинах B и E, то на левой и правой чаше будет лежать 1 + 2 = 3 и 4 + 5 = 9 грамм соответственно, то есть правая чаша перевесит.

Наконец, если он поменял местами шарики в вершинах C и F, то на чашах будет лежать 1 + 5 = 6 и 2 + 4 = 6 грамм, то есть весы будут в равновесии.

*Ответ: по положению весов можно определить, какие шарики поменял местами шутник.*

**Задача 9**

Дано 27 монет, из которых одна фальшивая, причём фальшивая монета легче настоящей.

Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить фальшивую монету?

*Подсказка*

Делите монеты на три равные группы.

*Решение*

Разделим монеты на три группы по девять монет и сравним массы двух из них. Если при этом на чашечных весах не получилось равенства, то фальшивая монета содержится среди девяти более лёгких монет.

Если же получилось равенство, то фальшивая монета может содержаться только среди девяти монет, не принимавших участие во взвешивании. В любом случае, сделав одно взвешивание, мы нашли группу из девяти монет, среди которых обязательно есть фальшивая монета.

Разделим девять монет на три группы по три монеты и взвесим две из этих групп. Аналогично предыдущему после этого мы выделим группу из трёх монет, среди которых есть фальшивая.

Наконец, последним взвешиванием сравним массы двух монет из этих трёх и определим фальшивую монету.

**Задача 10**

В корзине лежат 13 яблок. Имеются весы, с помощью которых можно узнать суммарный вес любых двух яблок.

Придумайте способ выяснить за 8 взвешиваний суммарный вес всех яблок.

*Подсказка*

Попробуйте за три взвешивания найти суммарный вес трёх яблок.

*Решение*

Занумеруем яблоки. Взвесим первое яблоко со вторым, второе с третьим и третье с первым, затем сложим полученные веса и получим удвоенный вес трёх яблок.

Итак, за три взвешивания мы узнали суммарный вес первых трёх яблок. Осталось пять взвешиваний и десять яблок, которые взвешиваем попарно.

Суммируя все данные, получим вес 13 яблок.

**Задача 11**

Имеются чашечные весы без гирь и 3 одинаковые по внешнему виду монеты, одна из которых фальшивая: она легче настоящих (настоящие монеты одного веса).

Сколько надо взвешиваний, чтобы определить фальшивую монету? Решите ту же задачу в случаях, когда имеется 4 монеты и 9 монет.

*Подсказка*

При поиске фальшивой монеты среди трех монет попробуйте положить на каждую чашку весов по одной монете, среди 4 — по две, а среди 9 — по три монеты.

*Решение*

Если у нас 3 монеты, достаточно одного взвешивания. Кладём на каждую чашку весов по одной монете, при этом если одна из чашек легче, значит, фальшивая монета на ней.

Если же весы в равновесии, то фальшивая монета та, которую не положили на весы.

Если у нас 4 монеты, то потребуется два взвешивания: при первом кладём на каждую чашку весов по 2 монеты, при втором берём те 2 монеты, которые оказались легче, и кладём их по одной на каждую чашку. Та монета, которая легче, — фальшивая.

Если у нас монет 9, снова потребуется два взвешивания. Делим монеты на три группы по 3 монеты и кладём две из этих троек на две чашки весов. Если весы в равновесии — рассматриваем те 3 монеты, которые мы не клали на весы.

Если весы не в равновесии — рассматриваем те 3 монеты, которые легче. Теперь задача свелась к самой первой: "есть 3 монеты, одна из них фальшивая".

Как мы уже знаем, в этом случае для определения фальшивой монеты требуется только одно взвешивание.

*Ответ: 1; 2; 2.*

**Задача 12**

Имеются чашечные весы без гирь и 3 одинаковые по внешнему виду монеты. Одна из монет фальшивая, причём неизвестно, легче она настоящих монет или тяжелее (настоящие монеты одного веса).

Сколько надо взвешиваний, чтобы определить фальшивую монету?

Решите ту же задачу в случаях, когда имеется 4 монеты и 9 монет.

*Подсказка*

Обратите внимание: требуется определить фальшивую монету, при этом вовсе не требуется указывать, легче она, чем настоящие, или тяжелее.

*Решение*

Если у нас 3 монеты, достаточно двух взвешиваний. Кладём на каждую чашку весов по одной монете.

Если весы не в равновесии, значит, та монета, которая осталась, — настоящая. Кладём её на весы с любой из остальных и сразу определяем, какая из них фальшивая.

Если же весы в равновесии, значит, фальшивая монета та, которая осталась, и вторым взвешиванием можно даже определить, легче она или тяжелее, чем настоящие.

Если у нас 4 монеты, опять достаточно двух взвешиваний. Разделим наши монеты на две кучки по 2 монеты и положим одну из кучек на весы — по монете на каждую чашку.

Если весы в равновесии, то обе монеты на них настоящие.

Если весы не в равновесии, то обе монеты на столе настоящие.

Итак, теперь мы знаем, в какой кучке лежит фальшивая монета. Положим на одну чашку весов монету из кучки, где обе настоящие, на вторую — монету из кучки, где фальшивая.

Если при этом весы будут в равновесии, значит, фальшивая монета осталась на столе, а если не в равновесии, значит, мы положили её на весы (в этом случае мы даже узнаем, легче она или тяжелее).

Если у нас монет 9, потребуется три взвешивания. Делим монеты на три кучки по 3 монеты и кладём две из этих троек на две чашки весов.

Если весы в равновесии — в оставшейся кучке находится фальшивая монета, и за два взвешивания (как это показано в случае 1 настоящей задачи) мы определим фальшивую монету.

Итак, всего нам понадобится три взвешивания. Пусть теперь весы не будут в равновесии, значит, одна из кучек на весах — с фальшивой монетой, а в той кучке, которая осталась, только настоящие. Кладём на весы эту кучку и любую из первых двух. Так мы найдём не просто кучку с фальшивой монетой, но и сразу определим, легче эта монета или тяжелее настоящих.

Мы проделали два взвешивания, но зато теперь уже только одним взвешиванием (как показано в случае 1 задачи 49) можем определить фальшивую монету. Итак, всего нам понадобится три взвешивания.

*Ответ: 2; 2; 3;4.*

**Задача 13**

Лиса Алиса и Кот Базилио — фальшивомонетчики. Базилио делает монеты тяжелее настоящих, а Алиса — легче. У Буратино есть 15 одинаковых по внешнему виду монет, но какая-то одна — фальшивая.

Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь Буратино может определить, кто сделал фальшивую монету — Кот Базилио или Лиса Алиса?

*Подсказка*

Обратите внимание: от Буратино вовсе не требуется узнать, какая именно монета фальшивая. Требуется только, чтобы он определил, кто сделал эту монету — Кот Базилио или Лиса Алиса, или, что то же самое, тяжелее фальшивая монета, чем настоящие, или легче.

*Решение*

Буратино может разделить свои монеты на три кучки по 7, 4, 4, или по 5, 5, 5, или по 3, 6, 6, или по 1, 7, 7 монет. При первом взвешивании он положит на весы две кучки монет одинаковой величины.

Если при этом весы оказались в равновесии, значит, все монеты на весах настоящие, а бракованная монета в оставшейся кучке. Тогда при втором взвешивании на одну чашку весов Буратино положит кучку с бракованной монетой, а на вторую — столько настоящих монет, сколько всего монет он положил на первую чашку, и тогда он сразу определит, легче фальшивая монета, чем настоящие, или тяжелее.

Если же при первом взвешивании весы оказались не в равновесии, значит, все монеты в оставшейся кучке настоящие. Тогда Буратино уберёт с весов лёгкую кучку, а монеты из тяжёлой кучки разделит на две равные части и положит на весы (если в кучке было 5 или 7 монет, предварительно добавит к ним одну настоящую монету).

Если при втором взвешивании весы оказались в равновесии, значит, фальшивая монета легче настоящих, а если нет, то тяжелее.

**Задача 14**

Известно, что "медные" монеты достоинством в 1, 2, 3, 5 коп. весят соответственно 1, 2, 3, 5 г. Среди четырех "медных" монет (по одной каждого достоинства) есть одна бракованная, отличающаяся весом от нормальной.

Как с помощью взвешиваний на чашечных весах без гирь определить бракованную монету?

*Подсказка*

Попробуйте сделать два взвешивания: при первом на одну чашку весов положите монеты достоинством в 2 и 3 коп., а на другую — в 5 коп.; при втором на одну чашку весов положите монеты в 1 и 2 коп., а на другую — в 3 коп.

*Решение*

Делаем два взвешивания. Первое — на одной чашке весов монеты в 2 коп. и 3 коп., на другой — в 5 коп. Второе — на одной чашке весов монеты в 1 коп. и 2 коп., на другой — в 3 коп.

При этом возможны четыре варианта. Если вдруг все монеты небракованные — весы оба раза будут в равновесии. Если бракованной окажется монета в 1 коп. — при первом взвешивании весы будут в равновесии, при втором — нет. Если бракованной окажется монета в 5 коп. — второй раз весы будут в равновесии, первый раз — нет. Если оба раза весы не будут в равновесии, то бракованной окажется монета либо в 2 коп., либо в 3 коп.

Тогда результат первого взвешивания покажет нам, тяжелее или легче бракованная монета, чем настоящие, а результат второго взвешивания определит эту монету.

**Задача 15**

Имеются неправильные чашечные весы, мешок крупы и правильная гиря в 1 кг. Как отвесить на этих весах 1 кг крупы?

*Подсказка*

Попробуйте поставить на одну чашку весов гирю в 1 кг и уравновесить весы.

*Решение*

Можно поступить, например, так: поставим на одну чашку весов гирю весом 1 кг и уравновесим весы крупой из мешка.

Теперь снимем с весов эту гирю и вместо нее насыпем крупу. Когда этой крупы станет ровно 1 кг, весы окажутся в равновесии.

**Задача 16**

Семь монет расположены по кругу. Известно, что какие-то четыре из них, идущие подряд, – фальшивые и что каждая фальшивая монета легче настоящей.

Объясните, как найти две фальшивые монеты за одно взвешивание на чашечных весах без гирь. (Все фальшивые монеты весят одинаково.)

*Решение*

Заметим, что три настоящие монеты также лежат подряд. Занумеруем монеты по кругу, например, двигаясь по часовой стрелке, числами от 1 до 7 (см. рис.).

*Решение*

Предложим два способа взвешивания.

*Первый способ.* На одну чашу весов положим монеты с номерами 1 и 2, а на другую – монеты с номерами 4 и 5. При таком взвешивании все четыре фальшивые монеты не могут оказаться на весах и при этом настоящих монет на весах – не более двух.

Рассмотрим два случая.

1) Одна из чаш легче. Тогда на ней обе монеты фальшивые.
2) Весы находятся в равновесии. Тогда на каждой чаше весов – одна фальшивая монета и одна настоящая.

Следовательно, монеты 6 и 7 – фальшивые.

*Второй способ.* На одну чашу весов положим монету № 1, а на другую – монету № 4. Возможны три случая.

1) Весы оказались в равновесии. Тогда обе монеты на чашах – фальшивые.
2) Монета № 1 легче, чем монета № 4. Тогда монета № 1 – фальшивая, а №4 – настоящая. Значит, и монета 7 – также фальшивая.
3) Монета № 1 тяжелее, чем монета № 4. Тогда монета № 1 – настоящая. Следовательно, монеты 4 и 5 – фальшивые.

**Задача 17**

На физическом кружке учитель поставил следующий эксперимент. Он разложил на чашечные весы 16 гирек массами 1, 2, 3, ..., 16 грамм так, что одна из чаш перевесила. Пятнадцать учеников по очереди выходили из класса и забирали с собой по одной гирьке, причем после выхода каждого ученика весы меняли свое положение и перевешивала противоположная чаша весов.

Какая гирька могла остаться на весах?

*Решение*

Поскольку в каждый момент времени массы на чашах весов отличались хотя бы на 1 грамм, то для того, чтобы перевесила противоположная чаша, необходимо забрать гирю массой не менее двух грамм. Следовательно, выходя из класса, ни один ученик не мог забрать гирю массой 1 грамм.

*Ответ:На весах осталась гиря массой 1 грамм.*

**Задача 18**

На столе в ряд лежат четыре монеты. Среди них обязательно есть как настоящие, так и фальшивые (которые легче настоящих). Известно, что любая настоящая монета лежит левее любой фальшивой.

Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь определить тип каждой монеты, лежащей на столе?

*Решение*

Пронумеруем монеты слева направо. Так как среди монет есть обязательно настоящая и фальшивая, то первая монета настоящая, а четвертая– фальшивая. Необходимо определить вид второй и третьей монет.

Настоящие монеты лежат левее фальшивых, значит возможны следующие случаи: 1) настоящая, настоящая, настоящая, фальшивая; 2) настоящая, настоящая, фальшивая, фальшивая; 3)настоящая, фальшивая, фальшивая, фальшивая.

Положим на левую чашу весов первую и четвертую монеты, а на правую чашу весов– вторую и третью монеты.

1) Если правая чаша перевесила, то на ней лежат только настоящие монеты, т.е. вторая и третья монеты– настоящие.
2) Если весы находятся в равновесии, то на каждой чаше лежат настоящая и фальшивая монеты, т.е. вторая монета– настоящая, а третья– фальшивая.
3) Если левая чаша перевесила, то на правой чаше лежат только фальшивые монеты, т.е. вторая и третья монеты– фальшивые.

**Задача 19**

Фальшивомонетчик Вася изготовил четыре монеты достоинством 1, 3, 4, 7 квача, которые должны весить 1, 3, 4, 7 граммов соответственно. Но одну из этих монет он сделал некачественно – с неправильным весом.

Как за два взвешивания на чашечных весах без гирек определить "неправильную" монету?

*Решение*

Сначала положим на одну чашу монеты в 1 квач и 3 квача, а на другую - монету в 4 квача; затем на одну чашу положим монеты в 3 квача и 4 квача, а на другую - монету в 7 квачей.

Если при одном из взвешиваний весы показали равенство, то некачественная монета - та, которая в этом взвешивании не участвовала.

Если при обоих взвешиваниях тяжелее оказалась одна и та же чаша весов, то некачественная монета - достоинством в 3 квача, иначе - достоинством в 4 квача.

**Задача 20**

Известно, что среди нескольких монет имеется ровно одна фальшивая (отличается по весу от настоящих). С помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определите, легче или тяжелее фальшивая монета настоящей (находить ее не надо), если монет а) 100; б) 99; в) 98?

*Решение*

а) Положим сначала на каждую чашу по 50 монет. Затем возьмем более тяжелую часть, разобьем ее на кучки по 25 монет и взвесим их. Если их массы равны, то фальшивая монета легче остальных, иначе - тяжелее остальных.

б) Разделим монеты на 3 кучки по 33 монеты и взвесим любые две из них. Если их массы равны, то сравним любую из них с третьей; если третья кучка легче, то и фальшивая монета легче остальных, иначе фальшивая монета тяжелее остальных.

Если же массы первых двух кучек различны, то взвесим более тяжелую из них с третьей. Если их массы окажутся равны, то фальшивая монета легче остальных, если же третья окажется легче, то фальшивая монета тяжелее остальных.

в) Отложим сначала две монеты в сторону, а остальные разобьем на 2 части по 48 монет и взвесим их. Если их массы равны, то взвесим две отложенные монеты с любыми двумя другими; если отложенные монеты окажутся легче, то и фальшивая монета легче остальных, иначе - тяжелее.
Если же массы первых двух кучек различны, то аналогично пункту а) разобьем более тяжелую на 2 части по 24 монеты и взвесим их. Если весы покажут равенство, то фальшивая монета легче остальных, иначе - тяжелее.

**Задача 21**

Дан мешок сахарного песка, чашечные весы и гирька в 1 г. Можно ли за 10 взвешиваний отмерить 1 кг сахара?

*Ответ: Да. Причем меньшим числом взвешиваний обойтись нельзя.*

**Задача 22**

У золотоискателя есть куча золотого песка массой 37 кг (и больше песка у него нет), двухчашечные весы и две гири 1 и 2 кг. Золотоискатель умеет делать действия двух типов:
- уравнивать весы, т.е. если сейчас весы не в равновесии, то он может пересыпать часть песка с одной чаши на другую так, чтобы весы встали в равновесие;
- досыпать до равновесия, т.е. если сейчас весы не в равновесии, то он может добавить песка на одну из чаш так, чтобы весы встали в равновесие.

Конечно, каждое из этих действий он может сделать только если для этого у него хватает песка.

Как ему за два действия с весами получить кучку, в которой ровно 26 кг песка? Смешать две кучки песка, а также просто ставить что-то на весы действием не считается.

*Решение*

Первым действием золотоискатель может поставить на левую чашу весов весь песок, а на правую обе гири – и пересыпать песок до достижения равновесия. В итоге он получит 20 кг песка слева и 17 кг песка (и две гири 1+2 кг) справа.

Вторым действием следует на левую чашу весов поставить 20 кг песка, а на правую гирю в 2 кг – и вновь уравнивать весы, пока слева не окажется 11 кг, а справа 9 кг песка (и одна гиря весом 2 кг).

Наконец, следует смешать полученную вторым действием кучу весом 9 кг и оставшуюся от первого действия кучу весом в 17 кг.

**Задача 23**

Имеется 68 монет, причём известно, что любые две монеты различаются по весу.

За 100 взвешиваний на двухчашечных весах без гирь найти самую тяжелую и самую лёгкую монеты.

*Решение*

Разобьём монеты на 34 пары. За 34 взвешивания сравним монеты внутри пар и более тяжёлые отложим в одну кучу, а более лёгкие – в другую.

Из "тяжёлой" кучи за 33 взвешивания выделим самую тяжёлую монету (при каждом взвешивании сравниваем две монеты, лёгкую отбрасываем, а тяжёлую сравниваем со следующей).

Точно так же за 33 взвешивания из "лёгкой" кучи выделим самую лёгкую монету. 34 + 33 + 33 = 100.

## Задачи на обратный ход

Решение задачи с конца. Проделывание операций в обратном порядке.

Если в задаче задана некоторая операция, и эта операция обратима, то можно сделать «обратный ход» от конечного результата к исходным данным. Анализ с конца используется в играх при поиске выигрышных и проигрышных ситуаций.

**Один из приёмов решения текстовых задач арифметическим способом.**

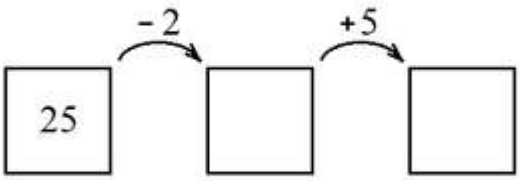
В 5 классе учащиеся должны освоить решение задач обратным ходом, то есть с конца. Этот приём позволяет закрепить взаимосвязь операций, его часто используют при решении составных задач, для решения которых надо использовать и другие способы. Начнём с подготовительной задачи.

**Задача 1**

В автобусе едут 25 пассажиров. На первой остановке вышли два, вошли пять пассажиров. Сколько пассажиров едет в автобусе после первой остановки?

*Решение*

Выполним схематический рисунок, подсказывающий порядок вычислений.




*Ответ: 28 пассажиров.*

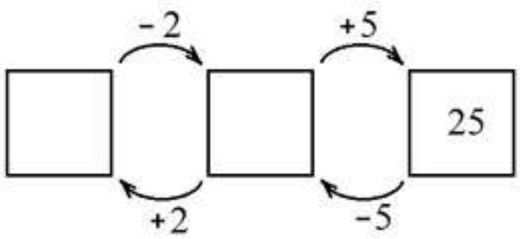
Теперь решим задачу, в которой нужно применить обратный ход, то есть провести вычисления в обратном порядке, применив обратные операции.

**Задача 2**

В автобусе едут несколько пассажиров. На первой остановке вышли два, вошли пять пассажиров. Сколько пассажиров ехало в автобусе до первой остановки?

*Решение*

Выполним схематический рисунок. После того, как вошли 5 пассажиров, их стало 25, значит, до этого их было 25 — 5 = 20. Дальше заполняем пустые клетки.




*Ответ: 22 пассажира.*

**Задача 3**

На двух полках стояло 30 книг. Когда с первой полки на вторую переставили 4 книги, то книг стало поровну. Сколько книг стояло на каждой полке первоначально?

*Решение*

Начнём с конца.

1) 30: 2 = 15 (книг) — стало на каждой полке после перестановки 4-х книг.

Вернём 4 книги на первую полку.

2) 15 + 4 = 19 (книг) — было на первой полке первоначально,

3) 15 — 4 = 11 (книг) — было на второй полке первоначально.

*Ответ: 19 и 11 книг.*

*Замечание.* Чтобы уравнять количество книг, с первой полки на вторую переставили половину разности, т. е. (19 — 11): 2 = 4 книги.

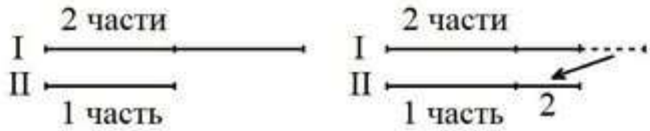
**Задача 4**

На двух полках стояли книги — на первой полке в два раза больше, чем на второй. Когда с первой полки на вторую переставили две книги, то книг на полках стало поровну.

Сколько книг стояло на каждой полке первоначально?

*Решение*

Пусть число книг на второй полке составляет 1 часть, а на первой — 2 части (рис. слева). Чтобы уравнять число книг, надо половину одной части переставить на вторую полку (рис. справа), т. е. две переставленные книги составляют половину одной части.




1) 2 * 2 = 4 (книги) — приходится на 1 часть, стояло книг на второй полке первоначально,

2) 4 * 2 = 8 (книг) — стояло на первой полке первоначально.

*Ответ: 8 книг и 4 книги.*

**Задача 5**

В двух карманах было 150 монет. Затем семнадцать монет были перемещены из одного кармана в другой. В результате количество монет во втором кармане стало в 2 раза больше, чем в первом.

Сколько монет было в первом кармане первоначально?

*Решение*

Определим, сколько монет стало в первом кармане после их перекладывания, для этого решим «задачу на части». Пусть новое число монет в первом кармане составляет 1 часть, тогда во втором кармане — 2 части.

1) 1 + 2 = 3 (части) — приходится на 150 монет;

2) 150: 3 = 50 (монет) — стало в первом кармане;

3) 50 + 17 = 67 (монет) — было в первом кармане первоначально.

В чём же неполнота решения? Дело в том, что условие задачи «из одного кармана в другой» может означать как «из первого кармана во второй», так и «из второго кармана в первый». Второй случай приводит к ответу: 33 монеты.

*Ответ: 67 монет или 33 монеты.*

**Задача 6**

Вася задумал число, умножил его на 2, прибавил 3 и получил 17. Какое число он задумал?

*Решение*

Будем действовать "с конца": чтобы узнать, какое число получил Вася перед тем, как получить 17, отнимем от 17 число 3, а затем разделим результат на 2, чтобы узнать исходное число.(17-3):2=7.

*Ответ: 7.*

**Задача 7**

Алеша задумал число. Он прибавил к нему 5, потом разделил сумму на 3, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил число 2. Какое число задумал Алеша?

*Решение*

Решение аналогично решению задачи 1. ((2x7+6):4)x3-5=10

*Ответ: 10.*

**Задача 8**

В стакане находится одна бактерия. Через секунду она делится пополам. Каждая из получившихся бактерий через секунду также делится пополам и так далее. Через минуту стакан заполнился.

а) Через какое время стакан был заполнен наполовину?

б) через какое время заполнится стакан, если изначально в нем находилось 4 бактерии?

*Решение*

а) По условию задачи, каждую секунду количество бактерий в стакане удваивается. Значит, половина стакана заполнится ровно на секунду раньше, чем полный стакан, то есть за 59 секунд.

б) Заметим, что если поместить в стакан 1 бактерию, то через 2 секунды их станет ровно 4, а стакан заполнится через ещё 58 секунд. Значит, если мы сразу поместим в стакан не 1, а 4 бактерии, он заполнится за 58 секунд.

*Ответ: а) 59 секунд; б) 58 секунд.*

**Задача 9**

Два пирата играли на золотые монеты. Сначала первый проиграл половину своих монет (отдал второму), потом второй проиграл половину своих, потом снова первый проиграл половину своих. В результате у первого оказалось 15 монет, а у второго - 33. Сколько монет было у первого пирата до начала игры?

*Решение*

Будем рассуждать обратным путём. Перед последним ходом у первого должно оставаться 30 монет, а у второго – 18, в этом и только в этом случае первый, проиграв половину своих монет, сам останется с 15-ю, а капитал второго при этом повысится с 18 до 33 монет. Далее, перед вторым ходом у второго должно было быть 18x2=36 монет (проиграет половину - останется у него 18), а у первого - 30-18=12 монет. Перед самым первым ходом у первого тогда было 12x2=24 монеты, а у второго, аналогично, 36-12=24 монеты.

*Ответ: 24 монеты.*

**Задача10**

Над озерами летели гуси. На каждом садилась половина гусей и еще полгуся, остальные летели дальше. Все гуси сели на семи озерах. Сколько было гусей?

*Решение*

Посмотрим, сколько гусей село на последнем озере. Так как дальше никто не полетел, то все гуси, пролетающие над седьмым озером, сели на нём. А это означает, что половина всех этих гусей, да ещё полгуся - это и есть все эти гуси. То есть половина этих гусей - это ровно полгуся. То есть на последнем озере сел ровно 1 гусь.

Далее, на шестом озере село 2 гуся - если дальше полетел 1 гусь, а села половина гусей и еще полгуся, то всего летело 3 гуся. Несложно убедиться, что на пятом озере село 4 гуся, на четвёртом - 8, на третьем - 16, на втором - 32, а на первом - 64.

Таким образом, всего на озёра село 1+2+4+8+16+32+64=127 гусей. А так как все гуси сели на семи озёрах, то и изначально летело 127 гусей.

*Ответ: 127 гусей.*

**Задача 11**

Один Бездельник захотел получить денег и заключил сделку с Чёртом. Теперь каждый раз, когда Бездельник переходит мост через речку, количество имеющихся у него денег удваивается. Но за это он отдаёт Чёрту каждый раз по 24 копейки.

Сколько денег было у Бездельника, если он прошёл по мосту 3 раза и деньги у него закончились?

*Решение*

После того, как Бездельник в третий раз прошёл по мосту, он заплатил 24 копейки Чёрту и остался без денег. Значит, после того, как он в третий раз прошел по мосту у него было ровно 24 копейки, а до этого - 24:2=12 копеек. Эти деньги оказались у Бездельника после того, как он во второй раз прошёл по мосту и заплатил Чёрту.

Значит, до этого у него было (12+24):2=36:2=18 копеек. А до первого прохода по мосту, то есть в самом начале, у него была (18+24):2=42:2=21 копейка.

*Ответ: 21 копейка.*

**Задача 12**

В классной комнате было несколько учеников. После того, как 7 учеников вошли и 9 вышли, в комнате их стало 31. Сколько учеников было в классной комнате первоначально?

*Решение*

Нашу задачу можно решать обратным ходом: 31 + 9 – 7 = 33. Итак, 33 ученика было первоначально в комнате.

*Ответ: 33 ученика.*

**Задача 13**

Задумали число, к нему прибавили 1, сумму умножили на 2, произведение разделили на 3 и от результата отняли 4, получили 6. Какое число задумали?

*Решение*

(6 + 4) × 3: 2 – 1 = 14. 14 – искомое число.

*Ответ: число 14.*

**Задача 14**

В двух комнатах было 76 человек. Когда из одной комнаты вышли 30 человек, а из второй – 40 человек, то в комнатах осталось поровну.

Сколько человек было в каждой комнате?

*Решение*

30+40=70 (ч.) всего вышло

76-70=6 (ч.) всего осталось

6:2=3 (ч.) осталось в каждой комнате

30+3=33 (ч.) было в 1-й комнате

40+3=43 (ч.) было во 2-й комнате

*Ответ: 33 человека, 43 человека.*

**Задача 15**

Женщина собрала в саду персики. Чтобы выйти из сада, ей пришлось пройти через четыре двери, каждую из которых охранял свирепый стражник, отбиравший половину персиков. Домой она принесла 10 персиков. Сколько персиков досталось стражникам?

*Решение*

10х2=20 (персиков) было перед четвёртыми воротами,

20х2=40 (персиков) было перед третьими воротами,

40х2=80 (персиков) было перед вторыми воротами,

80х2=160 (персиков) было всего,

160-10=150 (персиков) досталось стражникам

*Ответ: 150 персиков.*

**Задача 16**

Над озёрами летели гуси. На каждом озере садилось половина гусей и ещё один гусь, остальные летели дальше. Все гуси сели на пяти озёрах. Сколько было гусей?

*Решение*

1 + 1 = 2(гуся) сели на пятое озеро,

(2 + 1) × 2 = 6 (гусей) сели на четвёртое озеро,

(6 + 1) × 2 = 14 (гусей) сели на третье озеро,

(14 + 1) × 2 = 30 (гусей) сели на второе озеро,
(30 + 1) ×2 = 62 (гуся) было всего.

*Ответ: 62 гуся было всего.*

**Задача 17**

Я задумала число, умножила его на 7, прибавила 15 и получила 50. Какое число я задумала?

*<u>Решение</u>*

Начнем решение задачи с "конца". В результате всех действий мы получили число 50. Далее от 50 отнимаем 15 и получаем число 35, до прибавления 15. Затем число, полученное, в первом действии 35 делим на 7, тем самым получаем искомое число 5.

*Ответ: число 5.*

**Задача 18**

Группа туристов отправилась в поход. В первый день они прошли 1/3 пути, во второй - 1/3 остатка, в третий - 1/3 нового остатка. В результате им осталось пройти 32км. Сколько километров был маршрут туристов?

*<u>Решение</u>*

Так как осталось 32км, а в третий день туристы прошли остаток, то 32км будут составлять последнего 2/3 остатка, тогда сам последний остаток будет равен 32 : 2/3 = 48 (км). Эти 48км будут составлять 2/3 длины маршрута, оставшегося пройти после первого дня. Тогда весь маршрут, который осталось пройти, будет равен 48: 2/3 = 72 (км). Эти 72км составляют вновь 2/3, но уже всего маршрута туристов, а значит, весь маршрут будет равен 72: 2/3 = 108 (км). Задача решена.

Проверка: 108:3·1=36 км - прошли в первый день; 108-36=72, 72:3·1=24 км - во второй день; 72-24=48, 48:3·1=16 км - в третий день; 48-16=32 км - осталось пройти.

*Ответ: 108 км.*

**Задача 19**

Средний из трех братьев старше младшего на 2 года, а возраст старшего брата превышает сумму лет двух остальных братьев четырьмя годами. Найдите возраст каждого брата, если вместе им 96 лет.

*<u>Решение</u>*

Удвоенные возраст старшего брата на 4 года больше от суммы лет всех троих братьев и равен поэтому 96+4=100 годам. Значит, возраст старшего брата равен 100:2=50 годам. Удвоенный возраст среднего брата на 2 года больше от суммы его лет и лет младшего брата и равен поэтому (96-50)+2=48. Значит, возраст среднего брата равен 48:2=24 годам. Теперь осталось найти возраст младшего брата: 96-50-24=22 года. Получаем ответ: младшему - 22, среднему - 24, старшему – 50.

*Ответ: 22, 24 и 50 лет.*

**Задача 20**

Однажды купец предложил бездельнику заработать. «Как только ты перейдешь через этот мост, - сказал он, - твои деньги удвоятся. Можешь переходить по нему сколько хочешь раз, но после каждого перехода отдавай мне за это 24 рубля». Бездельник согласился и … после третьего перехода остался без денег. Сколько денег у него было сначала?

*<u>Решение</u>*

Так как после третьего перехода у бездельника денег не осталось, то после перехода моста в третий раз у него было 24 рубля, а до перехода третьего моста - 12 рублей. Тогда после перехода второго моста у бездельника было 12 + 24 = 36 (рублей), а до перехода второго моста - 36  2 = 18 (рублей). Рассуждая аналогично, получим, что после перехода первого моста у бездельника стало 18 + 24 = 42 (рубля), а перед переходом первого моста - 42: 2 = 21 (рубль). Таким образом, у бездельника сначала был 21 рубль.

*Ответ: 21 рубль.*

**Задача 21**

Катя нарвала в саду яблоки. По дороге домой она встретила одну за другой трех подруг. Каждой она отдавала половину имеющихся у нее яблок. Домой она принесла два яблока. Сколько яблок нарвала Катя?

*Решение*

Встречая каждую подругу, Катя делила яблоки поровну. В результате у нее осталось два яблока. Первоначальное число яблок найдем "обратным ходом".

(((2 * 2) * 2) * 2) * 2 = 16 (яблок) - У Кати было 16 яблок.

*Ответ: 16 яблок.*

**Задача 22**

На озере расцвела одна лилия. Каждый день число цветков удваивалось, и на двадцатый день все озеро покрылось цветами. На который день покрылась цветами половина озера?

*Решение*

Начнем с конца. Пусть сегодня половина озера покрылась цветами. Через сколько дней покроется все озеро? Завтра. И это будет 20-й день.

*Ответ: за 19 дней.*

**Задача 23**

Три мальчика делили 120 фантиков. Сначала Петя дал Ване и Толе столько фантиков, сколько у них было. Затем Ваня дал Толе и Пете столько, сколько у них стало. И наконец, Толя дал Пете и Ване столько, сколько у них к этому моменту имелось. В результате всем досталось поровну. Сколько фантиков было у каждого в начале?

*Решение*

Известно, что в конце у всех оказалось по 40 фантиков, а перед этим у Пети и Вани было вдвое меньше. Значит, у Пети и Вани было по 20, а у Толи – 80. А перед этим у Пети и Толи было вдвое меньше, т.е. у Пети было 10, у Толи – 40, а у Вани – 70. И, наконец, возьмем половину фантиков у Вани и Толи и вернем Пете.

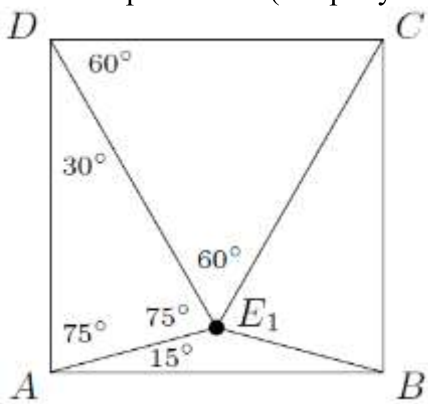
*Ответ: у Пети было 65 фантиков, у Вани – 20, а у Толи – 35.*

**Задача 24**

В квадрате $ABCD$ на стороне $AB$ внутри квадрата построили равнобедренный треугольник $ABE$ с углами при основании $AB$ равными $15^o$. Докажите, что треугольник $CDE$ правильный.

*Решение*

Решим обратную задачу: докажем, что если треугольник $CDE_1$ правильный, то у треугольника $ABE_1$ углы при основании равны $15^o$ (см. рисунок).




Поскольку угол $ADE_1$ равен $30^o$ и $DE_1 = AD$, то угол $E_1AD$ равен углу $AE_1D$ равен $75^o$. Значит, угол $E_1AB$ равен $15^o$. Аналогично, угол $E_1BA$ равен $15^o$.

Итак, мы доказали, что вершина $E_1$ правильного треугольника $CDE_1$ попадает как раз в ту точку $E$, которая дана по условию задачи, т.е. $E = E_1$. Значит, треугольник $CDE$ правильный.

**Задачи для самостоятельного решения**

1. Однажды царь наградил крестьянина яблоком из своего сада. Пошел крестьянин к саду и видит: весь сад огорожен тройным забором, в каждом заборе только одни ворота, и в каждых воротах стоит сторож. Подошел крестьянин к первому сторожу и показал царский указ, а сторож ему в ответ: «Иди возьми, но при выходе отдашь мне половину тех яблок, что несешь,  и еще одно». То же ему сказали второй и третий сторож. Сколько яблок должен взять крестьянин, чтобы после расплаты со сторожами у него осталось одно яблоко?

2.Трем братьям дали 24 бублика так, что каждый получил столько бубликов, сколько ему лет. Меньший брат был сообразительный и предложил поменять часть бубликов: «Я, - сказал он, - оставлю половину бубликов, а другую разделю межу вами поровну; после этого средний брат также оставит половину бубликов, а другую разделит поровну между мной и старшим братом. В конце старший брат поделит так же». Так они и сделали. Оказалось, что все получили поровну. Сколько лет каждому брату?

3. Учитель раздавал школьникам открытки. Первому он дал одну открытку и одну десятую оставшихся. Второму он дал две открытки и одну десятую оставшихся и т.д. Девятому он дал девять открыток и одну десятую оставшихся. Оказалось, что все получили поровну и все открытки были розданы. Сколько всего было открыток?

4. На олимпе есть игра: всем богам наливают поровну нектара, затем один из них переливает другому столько нектара, сколько у того уже было, и это повторяется несколько раз. Однажды удалось слить весь нектар в чашу Зевса. Докажите, что число богов было степенью двойки.

## Задачи на чередование

**<u>Чередование.</u>** Поиск чередующихся элементов. Доказательство чётности количества чередующихся по кругу элементов. Чередование чётности элементов. Чётность суммы.

*<u>Основные идеи:</u>*

- ✓ Если нечто может находиться в двух состояниях, причём на каждом шаге эти состояния чередуются, то после чётного числа шагов оно будет находиться в исходном состоянии, а после нечётного – в противоположном.
- ✓ Если нечётное число объектов стоит по кругу, то их чередование невозможно.
- ✓ Если к какой-то величине на каждом шаге прибавляется нечётное число, то чётность той величины на каждом чётном шаге совпадает с исходной, а на каждом нечётном отличается от исходной.

**Задача 1**

Голодный удав разлёгся вокруг камня и с голодухи прикусил свой хвост. В это время кролик, пользуясь беспомощностью удава, начал издеваться над ним, перепрыгивая через лежащего удава на камень и обратно. Но через полчаса ему это надоело, и он пошёл домой, где с гордостью заявил, что ровно 357 раз перепрыгнул через бедное животное. Докажите, что он заблуждается.

*<u>Решение</u>*

После первого прыжка кролик оказался на камне, после второго – на земле, после третьего – на камне и т.д. Его положения на камне и на земле чередуются: после нечётного числа прыжков он оказывается на камне, после чётного – на земле. Так как кролик пришёл домой, он чётное число раз прыгал через удава.

**Задача 2**

На плоскости расположено 11 шестеренок, соединенных по цепочке. Могут ли все шестеренки вращаться одновременно?

*<u>Решение</u>*

Предположим, что первая шестеренка вращается по часовой стрелке. Тогда вторая шестеренка должна вращаться против часовой стрелки. Третья – снова по часовой, четвертая – против и т.д. Ясно, что «нечетные» шестеренки должны вращаться по часовой стрелке, а «четные» – против. Но тогда 1-я и 11-я шестеренки одновременно вращаются по часовой стрелке. Противоречие.

*Ответ: не могут.*

**Задача 3**

Конь вышел с поля a1 и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал четное число ходов.

*Решение*

Поскольку при каждом ходе меняется цвет поля, на котором стоит конь, то имеет место чередование цветов: белого и черного.

**Задача 4**

Может ли конь пройти с поля a1 на поле h8, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

*Решение*

Так как конь должен сделать 63 хода, то последним (нечетным) ходом он встанет на поле другой четности, нежели a1; но h8 имеет тот же цвет.

*Ответ: нет, не может.*

**Задача 5**

Может ли прямая, не содержащая вершин замкнутой 11-звенной ломаной, пересекать все ее звенья?

*Решение*

Если мы обойдем контур ломаной, переходя из каждой вершины в следующую, то каждый раз, пересекая прямую, будем оказываться в другой полуплоскости (прямая делит плоскость на две половины). Таким образом, имеет место чередование, и значит, количество вершин должно быть четным.

*Ответ: нет, не может.*

**Задача 6**

На хоккейном поле лежат три шайбы A, B и C. Хоккеист бьет по одной из них так, что она пролетает между двумя другими. Так он делает 25 раз. Могут ли после этого шайбы оказаться на исходных местах?

*Решение*

Будем называть расположение шайб правильным, если обходя вершины треугольника ABC именно в порядке A–B–C, мы получим обход по часовой стрелке, и неправильным в противном случае. Легко видеть, что при каждом ударе тип расположения меняется.

*Ответ: нет, не могут.*

**Задача 7**

Катя и ее друзья встали по кругу. Оказалось, что оба соседа каждого ребенка – одного пола. Мальчиков среди Катиных друзей пять. А сколько девочек?

*Решение*

Если где-то рядом стоят две девочки, то рядом с ними – снова девочки, рядом с ними снова девочки и т.д. В этом случае мальчиков вообще нет, что противоречит условию. Аналогично, придём к противоречию, предположив, что где-то рядом стоят два мальчика. Таким образом, мальчики и девочки чередуются. Отсюда следует, что их равное количество, то есть всего пять девочек, значит кроме самой Кати ещё четыре.

*Ответ: четыре.*

**Задача 8**

За круглым столом сидят 517 представителей четырёх племён: люди, гномы, эльфы и гоблины. Люди никогда не сидят рядом с гоблинами, а эльфы рядом с гномами. Докажите, что какие-то два представителя одного племени сидят рядом.

*Решение*

Предположим, что это не так. То есть рядом сидят только представители разных племён. Наденем на людей и на гоблинов красные шапки, а на эльфов и гномов – синие. Из условия задачи и нашего предположения следует, что цвета шапок чередуются по кругу. Но из-за нечётности их количества это невозможно. Мы пришли к противоречию!

**Задача 9**

Улитка ползёт по плоскости с постоянной скоростью и каждые 15 минут поворачивает на $90^0$ (в любую сторону). Докажите, что она сможет вернуться в исходную точку только через целое число часов.

*Решение*

Назовём путь, который улитка проделывает за 15 минут, *шагом*. Можно считать, что эти шаги она делает по горизонтали (вправо и влево) и по вертикали (вверх и вниз). Чтобы улитка смогла вернуться в исходную точку, число шагов вправо должно быть равно числу шагов влево. Следовательно, число горизонтальных шагов чётно. Аналогично число вертикальных шагов чётно. Но после каждого горизонтального шага следует вертикальный и наоборот. Поэтому число вертикальных шагов равно числу горизонтальных (общее число шагов чётно). Но сумма двух равных чётных чисел делится на 4. В каждом часе 15 минут содержится по четыре раза. Следовательно, улитка вернётся в исходную точку через целое число шагов.

## Чётность суммы

*Основные идеи:*

- ✓ Сумма двух чисел разной чётности нечётна.
- ✓ Сумма двух чисел одной чётности чётна.
- ✓ Чётность суммы двух чисел равна чётности их разности.
- ✓ Чётность суммы совпадает с чётностью количества нечётных слагаемых.

**Задача 10**

Можно ли разменять 25 лир десятью монетами в 1, 3 и 5 лир?

*Решение*

Так как сумма чётного количества (в данном случае 10) нечётных слагаемых будет чётным число. Но 25 — нечётное число.

*Ответ: нет.*

**Задача 11**

Хулиган Гоша порвал школьную стенгазету на 3 части. После этого он взял один из кусков и тоже порвал на 3 части. Потом опять один из кусков порвал на 3 части и т.д. Могло ли у него в итоге получиться 100 частей?

*Решение*

Если любой кусок стенгазеты разорвать на 3 части, то общее число кусков увеличится на 2. Значит, общее количество частей всегда будет нечётным. Но 100 — чётное число.

*Ответ: нет.*

**Задача 12**

Не вычисляя суммы 1+2+…+1999 определите её чётность.

*Решение*

В этой сумме 1000 нечётных слагаемых. Следовательно, она чётна.

*Ответ: сумма чётна.*

**Задача 13**

На доске записаны 613 целых чисел. Докажите, что можно стереть одно число так, что сумма оставшихся чисел будет чётной. Верно ли это для 612 чисел?

*Решение*

Если сумма всех написанных чисел чётна, то количество нечётных слагаемых чётно. Следовательно, есть чётное слагаемое, его и надо стереть. Если сумма всех написанных нечётна, то количество нечётных слагаемых нечётно. Значит, оно больше нуля (0-чётное число), и можно стереть нечётное слагаемое.

Для 612 слагаемых утверждение неверно. Если все слагаемые нечётны, то ни одно нельзя стереть, не испортив сумму.

**Задача 14**

В ряд выписаны числа от 1 до 1998. Требуется расставить между ними знаки «+» и «-» так, чтобы полученное выражение равнялось нулю. Удастся ли это сделать?

*Решение*

Чётность числа не зависит от поставленного пред ним знака, поэтому при любой расстановке знаков будет 999 нечётных слагаемых. Поэтому в любом случае сумма будет нечётна.

*Ответ: не удастся.*

**Задача 15**

Можно ли числа 1,2,…,21 разбить на несколько групп так, чтобы в каждой из них максимальное число равнялось сумме всех остальных?

*Решение*

При таком разбиении сумма чисел в каждой подгруппе была бы чётна. Следовательно сумма всех чисел должна быть чётной. Но т.к. мы имеем нечётное количество нечётных слагаемых, то сумма всех чисел нечётна.

*Ответ: нельзя.*

**Задача 16**

На чудо-дереве росли 30 апельсинов и 25 бананов. Каждый день садовник снимал ровно два фрукта. Причем, если он снимал одинаковые фрукты, то на дереве появлялся новый банан, а если разные — новый апельсин. В конце концов, на дереве остался один фрукт. Какой: банан или апельсин?

*Решение*

После того, как садовник снимает два фрукта, возможны три ситуации:
— *сняли два апельсина.* Тогда число апельсинов уменьшилось на 2, а число бананов увеличилось на 1.
— *сняли два банана.* Тогда число апельсинов не изменилось, а число бананов уменьшилось на 1.
— *сняли один апельсин и один банан.* Тогда число апельсинов не изменилось (один сорвали, один вырос), а число бананов уменьшилось на 1.

Получается, что число апельсинов всегда либо не изменяется, либо уменьшается на 2. Изначально апельсинов было 30 — чётное число.

Так как чётность их количества никогда не меняется, то остаться 1 апельсин не может, так как 1 — нечётное число. Значит, остался банан.

*Ответ: банан.*

**Задача 17**

Квадрат размером 6×6 покрыт без наложений костями домино размером 1×2. Докажите, что можно разрезать квадрат, не повредив ни одной «доминошки».

*Решение*

Покажем, что любая прямая, проходящая по линиям клеток, разрезает чётное количество «доминошек». С каждой из двух сторон относительно любой такой прямой будет чётное число клеток (так как каждая из двух частей, на которые оказалась разрезана доска, состоит из нескольких строк или столбцов по 6 клеток). Но если оказалось, что прямая разрезала нечётное число «доминошек», то каждая из этих частей должна состоять из нескольких «доминошек» по 2 клетки и нечётного количества половинок «доминошек» по 1 клетке. Т.е. в этом случае такие части должны состоять из нечётного количества клеток. Противоречие.

Предположим теперь, что любая из 10 прямых (5 вертикальных, 5 горизонтальных) разрезает хотя бы одну «доминошку». Так как 1 — нечётное число, то каждой прямой должно быть пересечено хотя бы 2 «доминошки». При этом каждая «доминошка» может быть пересечена не более, чем одной прямой. Значит, всего «доминошек» должно быть не меньше, чем $10\cdot2=20$. Но их только $36:2=18$. Противоречие. Значит, есть прямая, которая не пересекает ни одной «доминошки». По ней и нужно разрезать доску.

# Задачи на четность

Четность. Четность результата арифметических действий. Разбиение на пары. Инвариант. Полуинвариант.

**Четность**

Известно, что целые числа бывают четными и нечётными. Четные числа можно записать в виде 2k, где k – целое число, а нечетные – в виде 2k+1. Решения задач с использованием четности и нечетности чисел отличаются логической безупречностью и абсолютной обоснованностью выводов, которые требует знание свойств арифметических операций.

Свойства четности для целых чисел:

1. Сумма четных чисел четна.
2. Сумма двух нечетных чисел четна.
3. Сумма четного и нечестного чисел нечетна.
4. Произведение любого числа на чётное – чётно.
5. Если произведение нечетно, т о все сомножители нечетны.
6. Сумма четного количества нечетных чисел четна.
7. Сумма нечетного количества нечетных чисел нечетна.
8. Разность и сумма двух данных чисел – числа одной четности.
9. Если объекты можно разбить на пары, то их количество четно.

**Четные и нечетные числа**

**Задача 1**

Кузнецу заказали выковать десять мечей. Каждый меч может стоить 3,5 или 7 златников. Могут ли они стоить в сумме 53 златника?

*Решение*

Сумма четного количества нечетных чисел четна. У нас есть 10 мечей, цена каждого меча – нечетное число, значит, их сумма должна быть четна. Но 53- число нечетное, поэтому получить его в виде суммы 10 нечетных чисел нельзя.

*Ответ: нет.*

**Задача 2**

Можно ли 7 селений соединить между собой попарно так, чтобы каждое было соединено напрямую ровно с тремя другими?

*Решение*

При решении этой задачи используется такое соображение: если мы рассматриваем объекты типа верёвки – провода, дороги, рукопожатия, знакомства и т.д., то при любом количестве объектов число концов должно быть чётным. Предположим, что мы соединили между собой 7 селений попарно так, чтобы каждое было соединено ровно с тремя другими. Подсчитаем количество концов дорог, соединяющих эти селения. Понятно, что их число должно быть чётным. От каждого из 7 селений отходит 3 конца дорог, всего $7 \cdot 3 = 21$ конец, число нечётное. Значит, нельзя 7 селений соединить между собой попарно так, чтобы каждое было соединено ровно с тремя другими.

*Ответ: нет.*

**Задача 3**

13 команд мечников участвуют в королевском однокруговом турнире. Докажите, что в любой момент есть команда, сыгравшая чётное число встреч. (Однокруговой турнир – когда каждая команда играет с каждой ровно один раз).

*Решение*

Подсчитаем, сколько встреч провела каждая команда, и просуммируем полученные числа. В общей сумме каждая игра учитывается два раза. Если же подсчитать сумму игр 13 команд, сыгравших по нечётному числу встреч, результат будет нечётный. Чтобы общая сумма игр получилась чётной, хотя бы одна команда должна сыграть чётное число встреч.

**Задача 4**

В секции фехтования мальчиков в 14 раз больше, чем девочек, при этом всего в секции не более 20 человек. Смогут ли они разбиться на пары?

*Решение*

Пусть количество девочек x, тогда мальчиков 14x, всего 15x. Но $15x < 20$, значит, $x = 1$. Мальчиков 14, девочек – 1, всего 15 человек. Но 15 человек нельзя разбить на пары.

*Ответ: нет.*

### Четность как инвариант

Инвариант – термин, обозначающий нечто неизменяемое. Разберём несколько задач, где не меняется чётность некоторой величины.

**Задача 5**

Казначей положил на стол 6 монет, одну из них вверх орлом, другие – решкой. Можно ли все монеты положить вверх орлом, если разрешено одновременно переворачивать две монеты?

*Решение*

При переворачивании двух монет одновременно четность числа монет, лежащих орлом вверх, не меняется. Докажем это. Если перевернуть две монеты вверх орлом, то они станут вверх решкой (ОО → РР). Орлов стало на два меньше, а решек – на два больше, чётность не изменится. Если перевернуть две монеты вверх решкой, то они станут вверх орлом (РР → ОО). Орлов стало на два больше, а решек – на два меньше, чётность не изменится. Если перевернуть одну монету вверх орлом, а другую – вверх решкой (ОР → РО), количество орлов, как и количество решек, останется прежним. Чётность не изменится. В любом случае чётность числа монет, лежащих вверх орлом, не изменится. Если сначала вверх орлом лежала одна монета (а 1 – число нечётное), значит, при любой манипуляции количество таких монет может быть только нечётным, и соответственно, все 6 монет положить вверх орлом не удастся.

*Ответ: нет.*

**Задача 6**

Можно ли в таблице 5 х 5 расставить 25 натуральных чисел так, чтобы во всех строках суммы были чётные, а во всех столбцах – нечётные?

*Решение*

Пусть в каждой строке суммы чисел чётные, а в каждом столбце - нечётные. Сложим все полученные суммы по строкам: 25 чётных сумм вместе дают чётное число. Сложим все полученные суммы по столбцам: 25 нечётных сумм вместе дают нечётное число. Но сумма чисел во всех строках (в нашем примере чётное число) должна быть равна сумме чисел во всех столбцах (в нашем примере нечётное число), что невыполнимо в нашем примере.

*Ответ: нет.*

**Задача 7**

На столе стоят 16 кубков, один из них вверх дном. Можно ли все кубки поставить правильно, если можно одновременно переворачивать по 4 кубка?

*Решение*

Вначале правильно стоят 15 кубков (нечётное число), а вверх дном 1 кубок (нечётное число). Пусть мы переворачиваем все 4 кубка вверх дном. Тогда «нечёт» – 4 = «нечёт» число кубков будут стоять правильно. Теперь переворачиваем 3 кубка вверх дном, а 1 кубок – становится правильно. Т.е. 3 кубка, стоящих правильно, будут теперь перевёрнуты, а тот кубок, который был изначально перевёрнут, будет тоже стоять правильно. Тогда «нечёт» – 3 + 1 = «нечёт» число кубков будут стоять правильно. Переворачиваем 2 кубка вверх дном и два кубка – станут стоять правильно. Тогда «нечёт» + 2 = «нечёт» число кубков будут стоять правильно. Если перевернём 1 кубок вверх дном и 3 установим правильно, то получим опять «нечёт» – 1 + 3 = «нечёт» число кубков будут стоять правильно. Если все 4 кубка установим правильно, то «нечёт» + 4 = «нечёт» число кубков будут стоять правильно. Итак, чётность правильно стоящих кубков при переворачивании не меняется, то есть остаётся нечётным на любом шаге. Значит, установить все 16 кубков правильно невозможно.

*Ответ: нет.*

### Четность суммы и произведения чисел

**Задача 8**

На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 2017, 2018. Разрешается стереть с доски любые два числа и вместо них записать модуль их разности. В конце концов на доске останется одно число. Может ли оно равняться нулю?

*Решение*

Вычислим сначала сумму всех чисел, записанных на доске. Она равна:

1 + 2 + 3 + … + 2016 + 2017 + 2018 = (1 + 2018) + (2 + 2017) + … + (1008 + 1009) = [всего 1009 пар] = 2019 · 1009 = нечётное число (так как произведение нечётных чисел равно нечётному числу). Теперь посмотрим, как меняется эта сумма, если из неё взять два слагаемых и заменить их разностью этих чисел. Если оба числа чётные, то их сумма была чётной, и их разность тоже будет чётной. Сумма всех данных чисел уменьшится на чётное число, то есть «нечёт» − «чёт» = «нечёт». Чётность суммы всех данных чисел не изменится. Если оба числа нечётные, то их сумма была чётной, и их разность тоже будет чётной. Сумма всех данных чисел уменьшится на чётное число, то есть «нечёт» − «чёт» = «нечёт». Чётность суммы всех данных чисел не изменится. Если одно число чётное, а другое нечётное, то их сумма была нечётной, и их разность тоже будет нечётной. Чётность общей суммы всех данных чисел не изменится. Значит, у нас могут получаться только нечётные суммы всех записанных чисел на любом шаге, а нуль – число чётное, и оно в конце на доске остаться не может.

*Ответ: нет.*

**Задача 9**

На доске написаны числа 12, 22, 32, …, N2. Между ними произвольным образом расставляют знаки «+» и «–» и находят получившуюся сумму. Может ли такая сумма быть равной: а) 12, если N = 12; б) 0, если N = 70?

*Решение*

а) Может. Например, 12 – 22 – 32 + 42 + 52 – 62 – 72 + 82 + 92 – 102 – 112 + 122 = 12.

б) Докажем, что это невозможно. Квадраты чётных чисел – чётные числа, а квадраты нечётных чисел – нечётные числа. Среди 70 последовательных чисел ровно половина – нечётные, то есть в данной алгебраической сумме 35 нечётных чисел и 35 чётных, значит, их сумма всегда нечётна, и, следовательно, не может быть равна 0.

*Ответ: а) да; б) нет.*

**Задача 10**

На доске написаны последовательные натуральные числа от 1 до 2015. Разрешается за одну операцию стереть любые два числа и вместо них поставить их произведение. Какое наибольшее число операций можно сделать, прежде чем все числа на доске станут чётными? Какое наименьшее?

*Решение*

Произведение двух нечётных чисел – нечётное, а произведение любого натурального числа на чётное – чётное. Посчитаем, какое наибольшее число операций можно сделать, прежде чем все числа на доске станут чётными. Оставим на доске одно из нечётных чисел и не будем его трогать, пока есть другие числа. Тогда только после последней операции не останется нечётных чисел. Сколько же таких операций будет проведено? За каждую операцию количество чисел уменьшается на одно (так как вместо двух чисел записывается одно). Значит, наибольшее возможное число операций 2015 – 1 = 2014. Посчитаем, какое наименьшее число операций можно сделать, прежде чем все числа на доске станут чётными. Каждой операцией мы можем убрать не более чем одно число, в том числе и нечётное. Всего нечётных чисел на доске + 1 = 1007 + 1 = 1008. Значит, нужно хотя бы 1008 операций. Как можно действовать, чтобы за 1008 операций все числа на доске стали чётными: каждым ходом умножать одно из оставшихся нечётных чисел на чётное, тогда вместо них будет появляться их чётное произведение, и ровно за 1008 операций все числа на доске станут чётными.

*Ответ: 2014; 1008.*

**Задачи для самостоятельного решения**

1. Запишите в строчку пять чисел так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была чётная, а сумма всех чисел была нечётная.

2. Можно ли записать в строчку шесть чисел так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была чётная, а сумма всех чисел была нечётная?

3. Богатырь за один удар ломает бревно на три меньших. Сможет ли он разбить одно большое бревно на 12 маленьких?

4. В десяти коробках лежат мармеладки. В первой – 1, во второй – 2, в третьей – 3 и т.д., в десятой – 10. Саше за один ход разрешается в любые две коробки добавить по три мармеладки. Сможет ли Саша за несколько ходов уравнять количество мармеладок в коробках?

5. Загаданы три целых числа a, b, c. Разрешается выбрать любые два из них и спросить: их произведение чётное или нечётное? Всегда ли с помощью таких вопросов можно узнать, чётно или нечётно число b?

6. Учёный Кот посчитал сумму 1 + 3 + 5 + … + 999 и получил результат 247013. Какова чётность данной суммы? Верный ли ответ получил учёный Кот? Попробуйте выполнить сложение устно.

7. У оруженосца было 5 плиток шоколада. Может ли оруженосец, поделив каждую плитку на 9, 15 или 25 кусочков, получить всего 100 кусков шоколада?

8. В пещере разбойников в мешках, расставленных по кругу, лежат монеты, причём в любых двух соседних мешках число монет отличается на единицу. Могут ли быть расставлены таким образом: а) 3; б) 4; в) 98; г) 99 мешков?

9. Лена и Маша играют в игру: каждая из них записывает на бумажке по одному натуральному числу. Потом эти числа перемножаются, и если в результате получится чётное число, то выигрывает Лена, а если нечётное, то Маша. Может ли одна из девочек всегда выигрывать, как бы ни играла другая?

10. Можно ли в таблице 4 х 4 расставить натуральные числа таким образом, чтобы во всех строчках суммы оканчивались на 5, а во всех столбцах на 0? А в таблице 15 х 15?

11. Пять девятиногов с планеты Шуруру решили устроить турнир по армрестлингу. Смогут ли они одновременно провести поединки для всех своих ног, чтобы все ноги принимали участие и в каждом поединке встречалось ровно две ноги?

12. На доске написаны восемь простых чисел, каждое из которых больше 2. Может ли их сумма равняться 59?

13. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «–» так, чтобы значение полученного выражения было равно 2?

14. Можно ли подобрать четыре целых числа, сумма и произведение которых являются нечётными числами?

15. В десятичной записи числа 73 цифры, и все они единицы. делится ли это число на 18?

16. В ряд выписаны числа от 21 до 30. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «–» так, чтобы значение полученного выражения было равно 0?

17. На острове Серобур обитает 13 серых и 15 бурых хамелеонов. При встрече двух хамелеонов оба одновременно меняют свой цвет. Может ли оказаться, что все хамелеоны станут одного цвета?

18. Чётное или нечётное число 1 + 2 + 3 + … + 1000? Найдите значение суммы.

19. Кузнечик прыгает вдоль прямой на 2 м вправо или влево. Докажите, что он: а) может вернуться в исходную точку только после чётного числа ходов; б) никогда не попадёт в точку, находящуюся на расстоянии в 1 м от начальной.

20. Из 20 последовательных нечётных чисел 1, 3, 5, …, 35, 37, 39 выбрали 7 различных чисел, которые записали в порядке убывания. Пусть M – четвёртое по величине среди выбранных чисел, а S – среднее арифметическое этих семи чисел.

а) Может ли S – M равняться $\frac{2}{7}$?

б) Может ли S – M равняться $\frac{3}{7}$?

## Инвариант и полуинвариант

При решении некоторых математических задач применяется совокупность преобразований искомого объекта и требуется, используя данные преобразования, получить из одного состояния объекта другое. С помощью перебора вариантов в многих случаях можно убедиться в правомерности ответа «нельзя», но доказательство правильности полученного результата будет сложным. Таким математическим методом решения таких задач считается метод инвариант.

Что такое инвариант?

Инвариант – термин, используемый в математике и физике, а также в программировании, обозначает нечто неизменяемое.

Все задачи, объединённые условным названием инвариант, имеют следующий вид: даны некоторые объекты, над которыми разрешается выполнять определённые операции.

Если значение инварианта в двух состояниях объекта различно, то одно из них нельзя получить из другого. Во многих математических задачах инвариантом считаются четность (нечетность) чисел и остаток от деления. Здесь прежде всего основывается на определения четного и нечетного числа, абстрактного понятия четности, чисел имеющие «разную четность», а также на свойство о том, что при прибавлении единицы четность чисел изменяется.

**Задача 1**

На доске написано 12 плюсов и 13 минусов. Разрешается стереть любые два знака и написать вместо них минус, если они разные, и плюс, в противном случае. Какой знак останется на доске после выполнения 24 таких операций?

*Решение*

Рассмотрим три различных способа решения этой задачи:

*1 способ.* Заметим, что в результате разрешенной операции число минусов либо не меняется, либо уменьшается на два. Следовательно, четность числа минусов остается неизменной. Но первоначально число минусов было нечетным. Поэтому на доске останется знак «-».

*2 способ.* Заменим каждый «+» числом 0, а каждый «-» числом 1. Заметим, что сумма двух стираемых чисел будет иметь ту же четность, что и число, записываемое вместо них. Так как вначале сумма всех чисел была нечетной, то последнее оставшееся на доске число будет нечетным. Следовательно, на доске останется знак «-».

*3 способ.* Заменим каждый «+» числом 1, а каждый «-» числом -1. Тогда разрешенная операция аналогична такой: стираются любые 2 числа и записываются их произведение. Видим, что произведение всех написанных на доске чисел остается неизменным. Так как вначале произведение равнялось -1, то в конце останется число -1, то есть знак «-».

*Ответ: «-».*

В каждом из рассмотренных способов есть величина (соответственно четность количества минусов, четность суммы чисел, произведение написанных чисел), которая не менялась при выполнении разрешенных операций. Такую величину в математике и называют инвариантом (например, разрезание и перестановка частей фигур не меняет суммарной площади – площадь будет являться инвариантом).

В качестве инварианта могут выступать самые разные величины: четность, сумма, произведение, остаток по некоторому модулю и т.д.

Если значения инварианта для начального и конечного объекта не равны, то ответ на поставленный вопрос отрицателен. Если же выбранный инвариант принимает одинаковые значения в начале и в конце процесса, то это вовсе не означает, что начальный и конечный объекты могут быть получены друг из друга с помощью указанных операций: ясно только, что данный инвариант не может быть использован в этой задаче для отрицательного ответа на поставленный вопрос.

Наиболее часто встречаются следующие инварианты: остаток по некоторому модулю, раскраска, выделение части объята, алгебраическое выражение, полученное из условия задачи.

Иногда применяется такое понятие, как полуинвариант – величина, которая в процессе изменения может только увеличиваться (уменьшаться).

**Задача 2**

В одной вершине куба написано число 1, в остальных – нули. Можно прибавлять по единице к числам в концах любого ребра. Можно ли добиться того, чтобы все числа делились на некоторое число N > 1?

*Решение*

Раскрасим вершины куба в шахматном порядке, чтобы на концах каждого ребра были вершины разного цвета. После этого сумма чисел в четырёх белых вершинах всегда будет отличаться на 1 от суммы чисел в четырёх черных вершинах, так как и к тем, и к другим прибавляется по 1. Если же все числа делятся на N, то и суммы четырёх таких чисел будут делиться на N, и поэтому они не смогут отличаться на 1.

*Ответ: нет.*

**Задача 3**

Разменный автомат меняет одну монету на 5 других. Можно ли с его помощью разменять одну монету на 27 монет?

*Решение*

После каждого такого размена количество монет увеличивается на 4, при этом остаток при делении на 4 у числа монет остаётся неизменным. Сначала у нас была 1 монета, значит, остаток всегда будет равен 1. У числа 27 остаток при делении на 4 остаток равен 3, а не 1. Таким образом, разменять одну монету на 27 нельзя.

*Ответ: нет.*

**Задача 4**

Хулиган Вася порвал стенгазету, причём каждый попадающийся ему кусок он рвал на 4 части. Могло ли получиться 2021 кусков? А 2022 кусков?

*Решение*

Количество кусков каждый раз изменяется на 3 или на 9, то есть остаток при делении на 3 является инвариантом. Первоначально была одна газета, значит, количество кусков должно иметь остаток 1 по модулю 3, а 2021 делится на 3 с остатком 2, 2022 – 0.

*Ответ: нет.*

**Задача 5**

В ряд выписаны числа 1, 2, 3, 4, …, 99, 100. Можно менять местами два любых числа, между которыми стоит ровно одно. Можно ли получить ряд чисел 100, 99, 98, 97, …, …, 2, 1?

*Решение*

Заметим, что при разрешённых операциях меняются местами либо только чётные числа, либо только нечётные. При этом чётные числа всегда будут находиться на чётных местах. А в ряду 100, 99, 98, …, 2, 1 чётные числа находятся на нечётных местах. Значит, нельзя получить ряд, в котором на первом месте стоит 100. Значит, указанный ряд получить невозможно.

*Ответ: нет.*

**Задача 6**

На доске написано несколько букв А,В и С. Разрешается стереть две разные буквы и вместо них написать одну из этих трёх букв, отличную от стертых. В результате нескольких таких операций на доске осталась одна буква. Докажите, что она не зависит от порядка, в котором производились действия.

*Решение*

Несложно увидеть, как влияет одна такая операция на количество букв каждого вида: стирая букву, мы уменьшаем количество букв этого вида на 1, дописывая – увеличиваем. Так как в каждой операции количество букв каждого вида изменяется ровно на 1, то тем самым меняется и их четность. Значит, если четность была в начале одинаковой, то одинаковой она останется и в конце. Но, согласно условию задачи, в итоге двух видов букв вообще не осталась (т.е. в конце их осталось 0 – четное число), а третьего осталась одна буква (т.е. нечетное число).

Таким образом, четность количества букв оставшегося типа отличалась в конце (а значит, и в начале) от четности количества букв двух других типов. Поэтому, вне зависимости от порядка действий, в конце останется буква того типа, четность количества которого отличается от двух остальных.

**Задача 7**

К числу можно прибавить сумму его цифр. Можно ли за несколько шагов из числа 3 получить число 20 092 009?

*Решение*

При каждом шаге число увеличивается на сумму своих цифр. Заметим, что число и сумма его цифр имеют одинаковый остаток при делении на 3. Тройка делится на 3 без остатка, значит, числа, которые можно получить из нее такой операцией, тоже будут делиться на 3. Сначала у нас имеется число 3, оно делится на 3. Кроме того, если число делится на 3, то и сумма его цифр также делится на 3. Это значит, что, прибавляя к числу, делящемуся на 3, сумму его цифр (которая тоже делится на 3), мы на каждом шаге будем получать число, которое делится на 3. Число 20 092 009 не делится на 3, так как сумма его цифр равна $2 + 0 + 0 + 9 + 2 + 0 + 0 + 9 = 22$, а 22 на 3 не делится. Значит, такое число мы не можем получить ни на каком шаге.

*Ответ: нет.*

**Задача 8**

Из Астрахани в Москву везли 80 т персиков, которые содержали 99% воды. По дороге они усохли и стали содержать 98% воды. Сколько тонн персиков привезли в Москву?

*Решение*

В этой задаче инвариантом является вес «сухого остатка» (мякоти персика), т.е. разница между весом персиков и весом содержащейся в них воды. В Астрахани в персиках содержался 1% мякоти, то есть 0,8 т «сухого остатка». А в Москве эти 0,8 тонн составляли уже 2% привезённых персиков. Тогда вес персиков в Москве составил $0{,}8 \div 2 \cdot 100 = 40$ т. Вес уменьшился вдвое.

*Ответ: 40 тонн.*

**Задача 9**

На доске выписаны числа 1, 2, 3, …, 100. Разрешается стереть два числа $k$, $m$ и вместо них записать число $k \cdot m + k + m$. Эта операция выполняется до тех пор, пока на доске не останется одно число. Какое число останется на доске?

*Решение*

Докажем, что последнее число не зависит от порядка выполнения операции. Действительно, преобразуем запись числа $k \cdot m + k + m$. $k \cdot m + k + m = (k + 1) \cdot (m + 1) - 1$. Тогда $(k \cdot m + k + m) + 1 = (k + 1) \cdot (m + 1) - 1 + 1 = (k + 1) \cdot (m + 1) = M$. Обозначим через величину M произведение всех выписанных на доске чисел, увеличенных на 1. Эта величина остаётся постоянной, и последнее выписанное число будет равно $M - 1$. Тогда искомое число равно: $M - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 101 - 1 = 101! - 1$

*Ответ: $101! - 1$*

**Задача 10**

Круг разделен на 6 секторов, в каждом лежит орех. За ход можно один орех передвинуть в соседний сектор. Можно ли собрать все орехи в одном секторе ровно за 20 ходов?

*Решение*

Пусть мы смогли собрать все орехи в одном секторе. Раскрасим сектора в шахматном порядке, при этом покрасим сектор, на котором лежат все орехи, в белый цвет. За каждый ход меняется цвет поля, на котором лежал один из орехов. За 20 ходов орехи поменяли цвет всего 20 раз. Заметим, что орехи, вначале лежащие в секторах белого цвета, должны были сделать четное число ходов, чтобы попасть в указанный сектор. Те три ореха, что лежали в черных секторах, должны были сделать нечетное число ходов. Значит, сумма ходов должна была быть нечетной, что неверно для 20.

*Ответ: нет.*

**Задачи для самостоятельного решения**

1. В столовой стоят 50 стаканов, из них 25 — вверх дном. Сможет ли дежурный, переворачивая по 4 стакана, получить все стаканы стоящими правильно, то есть на донышке?

2. На доске написаны числа 1,2,..., 2009. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них разность этих чисел. Можно ли добиться того, чтобы все числа на доске были бы нулями?

3. Иван-царевич имеет два волшебных меча, один из которых может отрубить Змею Горынычу 21 голову, а второй — 4 головы, но тогда у Змея Горыныча отрастает 2008 голов. Заметим, что если у Змея Горыныча осталось, например, лишь три головы, то рубить их ни тем, ни другим мечом нельзя. Может ли Иван-царевич отрубить Змею Горынычу все головы, если в самом начале у него было 100 голов?

4. На шахматной доске разрешается за один ход перекрашивать все клетки в одной строке или в одном столбце. Может ли после нескольких ходов остаться ровно одна белая клетка?

5. В алфавите языка племени УЫУ две буквы: У и Ы, причём этот язык обладает интересным свойством: если из слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ и УЫУУ, то смысл слова не изменится. Точно так же смысл слова не меняется при добавлении в любое место слова буквосочетаний УУ, ЫЫУУЫЫ и УЫЫУ. а) Можно ли утверждать, что слова УЫЫ и УЫУЫ имеют одинаковый смысл? В этой задаче выражения «иметь одинаковый смысл» и «получаться друг из друга преобразованием» равноценны, б) Одинаковый ли смысл у слов УЫЫ и УЫУ?

6. В алфавите имеются только две буквы — А и Я. Комбинации букв АЯ и ЯЯЯ, ЯА и ААЯ, ЯЯ и ААА в любом слове можно заменять друг на друга. Можно ли из слова АЯЯ получить слово ЯАА?

7. На доске написаны числа от 1 до 20. Можно любую пару чисел (x, y) заменить на число x + y + 5xy. Может ли в конце получиться 20082009?

8. На столе лежит куча из 1001 камня. Первый ход состоит в том, что из кучи выкидывают камень, а затем делят её на две. Каждый следующий ход состоит в том, что из какой-либо кучки, содержащей более о-ного камня, выкидывают камень, а затем одну из кучек снова делят на две. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучки, состоящие из трёх камней?

9. Весь комплект домино выложили по правилам игры. Известно, что первой стоит пятёрка. Какая цифра стоит последней?

10. На доске написано 100 плюсов и 100 минусов. Можно заменять любые 2 минуса на плюс, плюс и минус на минус, два плюса на плюс. Докажите, что знак, который останется в конце, не зависит от порядка операций.

В заключении можно сказать, что применение идеи четности и нечетности позволяет учащимся опровержения тех фактов о которых спрашивается, и понять сходную логику с методом доказательства от противного. При самом распространенном ответе «не может» требуется объяснить почему именно этого не может быть. Если он говорит: «Может», то достаточно привести пример такого расклада, распределения или комбинации. Помимо прямых задач на четность и нечетность может включать в себя разбор близких по замыслу задач (на две противоположности), решаемых при помощи анализа отнесения объекта (или варианта) в ту или иную группу.

**Продукт**

**Задача 1.** На листе бумаги написано число 13. Восемнадцать учеников передают листок друг другу, и каждый прибавляет к числу или отнимает от него единицу — как хочет. Может ли в результате получиться число 0?

**Задача 2.** На вешалке висят 30 платков. 19 девочек по очереди подходят к вешалке и либо снимают, либо вешают платок. Может ли после ухода девочек остаться ровно 10 платков?

**Задача 3.** В таблице, где имеются 18 чисел (-1), можно производить следующую операцию: одновременно изменить знак двух (не более, не меньше) чисел в таблице. Можно ли, применяя эту операцию конечное число раз, получить таблицу, состоящую из (+ 1)?

**Задача 4.** Четно или нечетно число1+2+3+4+…+2022?

**Задача 5.** Верно ли равенство 1х2+2х3+3х4+…+99х100 = 20212022?

**Задача 6.** Определить на четность числа 3(х+1); х+х; х+х+2022, если х нечетное.

**Задача 7.** Можно ли квадрат размером 25х25 разрезать на прямоугольники 1х3?

**Задача 8.** Можно ли соединить 11 городов дорогами, так чтобы из каждого города выходило ровно 5 дорог?

**Задача 9.** Кузнечик прыгает по прямой: первый раз на 1 см, второй раз на 2 см и т. д. Может ли он через 21 прыжков вернуться на прежнее место?

**Задача 10.** 2022 человека выстроились в шеренгу. Всегда ли можно их расставить по росту, если за один ход разрешается переставлять только 2 людей, стоящих через одного?

**Задача 11.** Юля и её друзья встали в круг. Оба соседа любого из детей – одного пола. Мальчиков 7. Сколько девочек?

**Задача 12.** Может ли прямая пересечь все стороны 17-угольника ровно по одному разу (не проходя через вершины)?

# 7 класс

## Задачи о рыцарях и лжецах

Задачи о рыцарях и лжецах – это математические задачи, в которых фигурируют следующие основные персонажи: лжец – человек, всегда говорящий ложь, и рыцарь – человек, всегда говорящий правду. Также в таких задачах может фигурировать персонаж, который называется нормальным человеком, этот персонаж может как лгать, так и говорить правду. Решение подобных задач обычно сводится к перебору вариантов с исключением тех, которые приводят к противоречию. Это не простые, но веселые, увлекательные задачи. Они учат логически рассуждать и нестандартно мыслить.

**Задача 1**

На острове рыцарей и лжецов собралась компания из людей разного роста. Каждый заявил «Среди тех, кто выше меня, есть лжецы». Сколько лжецов могло быть среди них?

*Решение*

Самый высокий – точно лжец (ведь выше него вообще никого нет, а значит, и лжецов среди них нет). Любой, кто ниже него, автоматически говорит правду – значит он рыцарь. Лжец - один (самый высокий), все остальные - рыцари (сколько угодно).

*Ответ: один.*

**Задача 2**

На острове живут 100 рыцарей и 100 лжецов, у каждого из них есть хотя бы один друг. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды утром каждый житель произнес фразу «Все мои друзья – рыцари», либо «Все мои друзья – лжецы», причем каждую из фраз произнесло ровно 100 человек. Найдите наименьшее возможное число пар друзей, один из которых рыцарь, а другой – лжец.

*Решение*

Заметим, что в паре рыцарь-лжец каждый должен сказать, что другой лжец: рыцарь скажет правду, а лжец соврёт, в паре рыцарь-рыцарь оба скажут правду, а в паре лжец-лжец оба скажут неправду. Значит фраза «Все мои друзья – лжецы» употребляется только в парах рыцарь-лжец. Минимальное кол-во пар рыцарь-лжец, когда фразу сказали 100 человек, это 50. Если пар будет меньше, то и фраз тоже будет меньше.

*Ответ: 50.*

**Задача 3**

На острове рыцарей и лжецов собралась компания из 12 человек, каждый заявил всем остальным: «Вы все лжецы!». Сколько лжецов может быть в этой компании?

*Решение*

Предположим, что все аборигены лжецы. Но тогда каждый из них говорит правду, чего он как лжец делать никак не может. Противоречие!

Значит, есть хотя бы один рыцарь. Рассмотрим этого рыцаря. Он должен был сказать правду. То есть все остальные 11 человек – лжецы. Каждый из них при этом говорит неправду, то есть этот пример подходит. Больше, чем один рыцарей быть не может, т.к. иначе каждый из них, сказав, что все остальные лжецы солгал бы.

*Ответ: 11.*

**Задача 4**

По кругу сидят рыцари и лжецы – всего 12 человек. Каждый из них сделал заявление: «Все кроме, быть может, меня и моих соседей – лжецы". Сколько рыцарей сидит за столом, если известно, что лжецы всегда врут, а рыцари всегда говорят правду?

*Решение*

Все не могут быть лжецами – тогда все заявления были бы истинными. Значит, есть рыцарь. Все, кроме, быть может, его двух соседей – лжецы. Оба соседа не могут быть лжецами – тогда они сказали бы правду; оба не могут быть рыцарями – тогда бы они солгали. Единственная оставшаяся возможность – один сосед – лжец, другой – рыцарь (то есть два рыцаря рядом, остальные – лжецы) удовлетворяет условиям задачи.

*Ответ: 2.*

**Задача 5**

Перед нами трое жителей острова A, B и C. Один из них рыцарь, другой лжец и третий – нормальный человек. Эти люди высказывают следующие утверждения:

A: Я нормальный человек;

B: Это правда;

C: Я не нормальный человек.

Кто такие A, B и C?

Решение

Прежде всего заметим, что A не может быть рыцарем, потому что рыцарь не назвал бы себя нормальным человеком. Следовательно, получается, что A – либо лжец, либо нормальный человек. Тогда истинно высказывание человека B. Значит, B – либо рыцарь, либо нормальный человек. Но B не может быть нормальным человеком (так как A – нормальный человек), поэтому B – это доблестный рыцарь, а C – маленький лжец. Но лжец не может сказать о себе, что он не нормальный человек (так как любой лжец – не нормальный человек), и мы приходим к противоречию. Итак, A не может быть нормальным человеком. Следовательно, A – хитрый лжец. Это означает, что высказывание человека B ложно, в силу чего B должен быть нормальным человеком (лжецом он быть не может, так как лжец – человек A). Итак, A – хитрый лжец, а B – нормальный человек. Отсюда мы заключаем, что C – доблестный рыцарь.

*Ответ: A – хитрый лжец, B – нормальный человек, C – доблестный рыцарь.*

**Задача 6**

Вы попали на остров, на котором живут только рыцари и лжецы. Покинуть остров можно по одному из двух мостов (A или B). Один из мостов приведет вас на большую землю и вы спасены. Другой мост ведет на непроходимые болота. Для того, чтобы выбраться, у вас есть возможность обратиться с единственным вопросом к одному из двух жителей. Имеется достоверная информация: один из двух ваших собеседников рыцарь, а другой лжец. Какой вопрос следует выбрать?

а) Ты рыцарь? б) Твой друг рыцарь? в) Мне лучше выбрать мост A? г) Твой друг отправит на мост B?

Решение

Правильный вопрос, который нужно задать одному из жителей –г) Твой друг отправит на мост B?

Если выход по мосту A, то рыцарь ответит: «Да», а лжец ответит: «Нет». Если выход по мосту B, то рыцарь ответит: «Нет», а лжец ответит «Да».

*Ответ: г).*

**Задача 7**

Давным давно островитянин Дерб сказал своим друзьям:

- Вчера мой сосед заявил мне, что он лжец!

Кем является Дерб — рыцарем или лжецом?

Решение

Так как про соседа Дерба неизвестно, кем он является, то придётся рассмотреть два случая.

1. Если сосед Дерба - рыцарь, тогда то, что он заявил Дербу, должно быть правдой, то есть он должен быть лжецом. Но мы предположили, что он рыцарь. Значит, такого не может быть.

2. Если сосед Дерба - лжец, то он сказал Дербу неправду, то есть неправда, что он лжец. Снова противоречие.

Итак, если бы сосед Дерба сказал ему, что он лжец, то в любом случае получилось бы противоречие, то есть, такого быть не могло. Вывод: сосед Дерба этого *вообще не говорил!* Значит, Дерб лжёт.

*Ответ: Лжец.*

**Задача 8**

Как-то раз встретились два островитянина и один сказал другому: «По крайней мере один из нас – лжец». История умалчивает, ответил ли ему на это что-либо собеседник. Тем не менее определите, кем являются оба.

*Решение*

Пусть первый островитянин является лжецом. Тогда получается, что он сказал правду, чего быть не может.

Значит, он рыцарь. Тогда он сказал правду, значит, один из них лжец. Поскольку про первого уже знаем, что он рыцарь, то лжецом может быть только второй.

*Ответ: первый – рыцарь, второй - лжец.*

**Задача 9**

В другой раз встретились два островитянина Абыр и Валг.

- По крайней мере один из нас – рыцарь, - глубокомысленно изрек Абыр.

- Но ты то уж точно лжец! – рассмеялся ему в лицо Валг.

Определите, кем являются оба.

*Решение*

Пусть Абыр – лжец, тогда они оба лжецы, и Валг сказал правду, чего быть не может. Если Абыр – рыцарь, то он сказал правду, а Валг, назвав Абыра лжецом, солгал. Абыр – рыцарь, Валг – лжец.

*Ответ: Абыр – рыцарь, Валг – лжец.*

**Задача 10**

Однажды в четверг после дождя между островитянами Тимом и Томом произошел следующий диалог:

- Ты можешь сказать, что я рыцарь, - гордо заявил Тим.

- Ты можешь сказать, что я лжец, - грустно ответил ему Том.

Кем являются Тим и Том?

*Решение*

Пусть Тим — рыцарь, то есть говорит правду. Тогда Том может сказать, что Тим рыцарь. Поскольку это правда, то получается, что Том может сказать правду, значит, Том тоже рыцарь. Но тогда сказанное Томом тоже должно быть правдой, но на самом деле Тим не сможет сказать, что он лжец, потому что он не лжец, а Тим не врёт. Противоречие.

Значит, Тим — лжец. Тогда Том не может сказать, что он рыцарь, то есть Том не может сказать неправду. Значит, Том рыцарь. И действительно, слова Тома — правда, потому что Тим может соврать, сказав, будто Том лжец. Тим – лжец, Том – рыцарь.

*Ответ: Тим – лжец, Том - рыцарь.*

**Задача 11**

Некогда перед судом предстали три островитянина, которых для конфиденциальности мы обозначим А, Б и В. Известно, что преступление совершил ровно один из них, но кто из них является рыцарями, а кто – лжецами, было неизвестно.

- Б лжец. Но преступление совершил В, - заявил А.

- А и В либо оба рыцари, либо оба лжецы, - сообщил суду Б.

- Б говорит правду. Но тем не менее он и совершил преступление, - сказал В. Поразмышляв недолго, судья не только сумел определить, кто есть кто, но и изобличить преступника. А вы сумеете это сделать?

*Решение*

Если А – рыцарь, то Б – лжец, а В – преступник и лжец, так как он обвинил в преступлении Б. Если А – лжец, то Б – рыцарь, а В не совершал преступление. Если Б – рыцарь, то А и В оба рыцари или оба лжецы. Если А и В оба рыцари, то А говорит только правду, и Б – лжец. Если А и В оба лжецы, то утверждение В, что Б говорит правду, лживо, значит Б – лжец. Значит А не может быть лжецом.

А – рыцарь, Б – лжец, В – лжец-преступник.

*Ответ: А – рыцарь, Б – лжец, В – преступник.*

**Задача 12**

В клетках квадрата 4х4 стоят островитяне. В некоторый момент каждый из них произнес: «Во всех соседних со мной клетках стоят лжецы». Какое наибольшее количество лжецов могло быть среди них?

*Решение*

Рядом с каждым лжецом должен быть хоть один рыцарь, а рыцарей друг с другом рядом быть не может. Четырёх рыцарей можно легко расставить в квадрате так, чтобы остальное заполнилось лжецами (например, поставив рыцарей по углам). Тогда лжецов будет 4х4 - 4 = 12. Мы привели пример, что такое количество лжецов может быть. Докажем, что это ответ, то есть что больше нельзя. Лжецов можно было бы сделать больше только за счёт уменьшения количества рыцарей. Разобьём квадрат 4х4 на 4 квадратика 2х2. Докажем, что в любом из них должен обязательно быть рыцарь. Действительно, в противном случае весь квадратик 2х2 заполнен лжецами, а лжец, находящийся в углу большого квадрата, не будет соседствовать ни с каким рыцарем, что невозможно. Поскольку квадратиков 2х2 4 штуки, то и рыцарей меньше 4 быть никак не может.

*Ответ: 12.*

## Принцип Дирихле

В простейшем виде его выражают так: «Если десять кроликов сидят в девяти ящиках, то в некотором ящике сидят не меньше двух».

Общая формулировка: «Если $n$ кроликов сидят в $k$ ящиках, то найдется ящик, в котором сидят не меньше чем $\frac{n}{k}$ кроликов, и найдется ящик, в котором сидят не больше чем $\frac{n}{k}$ кроликов». В предыдущем примере получается, что в ящике не меньше $\frac{10}{9}$ кроликов, значит, не меньше двух.

Доказательство принципа Дирихле простое, но заслуживает внимания, поскольку похожие рассуждения часто встречаются.

Допустим, что в каждом ящике сидят меньше чем $\frac{n}{k}$ кроликов. Тогда во всех ящиках вместе кроликов меньше чем $\frac{n}{k} * k = n$. Получаем противоречие. Следовательно, наше предположение неверно. Что и требовалось доказать.

Принцип Дирихле кажется очевидным, однако, чтобы его применить, бывает не просто догадаться, что считать кроликами, а что ящиками.

Зная принцип Дирихле, можно догадаться, в каких случаях его применять. Например, если каждому элементу множества $A$ соответствует ровно один элемент множества $B$, то элементы $A$ можно назвать кроликами, а элементы $B$ ящиками.

Принцип Дирихле бывает непрерывным: «Если $n$ кроликов съели $m$ килограмм травы, то какой-то кролик съел не меньше $\frac{m}{n}$ килограмм и какой-то съел не больше $\frac{m}{n}$ килограмм» (а если кто-то съел больше среднего, то кто-то съел меньше среднего).

Заметим, что в последней формулировке кролики играют роль ящиков для травы, а трава роль кроликов, сидящих в ящиках.

**Задача 1**

В школе 400 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них родились в один день года.

*Решение*

Всего в году бывает 366 дней. Назовем дни ящиками, а учеников кроликами. Тогда в некотором ящике сидят не меньше $\frac{400}{366}$ кроликов, т.е. больше одного. Следовательно, не меньше двух.

Можно рассуждать от противного. Допустим, что каждый день отмечают день рождения не больше одного ученика, тогда всего учеников не больше 366. Противоречие.

**Задача 2**

Кот Базилио пообещал Буратино открыть великую тайну, если он составит чудесный квадрат $6 \times 6$ из чисел +1, -1, 0 так, чтобы все суммы по строкам, по столбцам и по большим диагоналям были различны. Помогите Буратино.

*Решение*

Допустим, что квадрат составлен. Тогда суммы чисел могут меняться в пределах от -6 до +6. Всего 13 значений. Строк в квадрате 6, столбцов 6, диагоналей 2. Получаем 14 различных сумм. Противоречие, значит составить такой квадрат невозможно.

**Задача 3**

На Земле океан занимает больше половины площади поверхности. Докажите, что в мировом океане можно указать две диаметрально противоположные точки.

*Решение*

Отразим океан симметрично относительно центра Земли. Поскольку сумма площадей океана и его образа превышает площадь земной поверхности, то существует точка, принадлежащая океану и его образу. Возьмем эту точку вместе с противоположной к ней.

**Задача 4**

На собеседование пришли 65 школьников. Им предложили 3 контрольные работы. За каждую контрольную ставилась одна из оценок: 2, 3, 4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки на всех контрольных?

*Решение*

Рассмотрим множество наборов из трех оценок за соответствующие контрольные. Количество таких наборов $4^3$ или 64 (4 возможности за каждую из трех контрольных). Поскольку число учащихся больше 64, по принципу Дирихле каким-то двум учащимся соответствует один набор оценок.

**Задачи для самостоятельного решения**

1. В классе 30 учеников. Во время контрольной работы Петя сделал 13 ошибок, а остальные – меньше. Докажите, что найдутся три ученика, сделавшие одинаковое число ошибок.

2. На Земле больше шести миллиардов жителей, людей старше 150 лет не существует. Докажите, что на Земле есть два человека, родившихся одновременно с точностью до секунды.

3. На плоскости проведено 12 прямых. Докажите, что какие-то две из них образуют угол не больше $15^{\circ}$.

4. В ящике лежат носки: 10 черных, 10 синих, 10 белых. Какое наименьшее число носков надо вынуть не глядя, чтобы среди вынутых оказалось два носка:

а) одного цвета;

б) разных цветов;

в) черного цвета?

5. На карьере добыли 36 камней. Их веса составляют арифметическую прогрессию: 490 кг, 495 кг, 500 кг, …, 665 кг. Можно ли увезти эти камни на семи трехтонных грузовиках?

6. Какое наименьшее число карточек спортлото «6 из 49» надо купить, чтобы наверняка хоть на одной из них был угадан хоть один номер?

7. Докажите, что среди любых пяти человек есть двое с одинаковым числом знакомых среди этих пяти человек. (Возможно, эти двое ни с кем не знакомы.)

8. Докажите, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать два, сумма или разность которых делится на 100.

9. Квадратная таблица $(2n+1) \times (2n+1)$ заполнена числами от 1 до $2n+1$ так, что в каждой строке и в каждом столбце представлены все эти числа. Докажите, что если это расположение

симметрично относительно диагонали таблицы, то на этой диагонали тоже представлены все эти числа.

10. В классе 25 человек. Известно, что среди любых трех из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.

11. Комиссия из 60 человек провела 40 заседаний, причем на каждом присутствовало ровно 10 членов комиссии. Докажите, что какие-то два члена комиссии встречались на ее заседаниях по крайней мере дважды.

12. Каждая из 9 прямых разбивает квадрат на два четырехугольника, площади которых относятся как 2 : 3. Докажите, что по крайней мере три из этих прямых проходят через одну точку.

13. Первоклассник Петя знает только цифру 1. Докажите, что он может написать число, делящееся на 1989.

## Задачи на применение симметричной стратегии

«Симметрия является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство»

*Герман Вейль.*

Слово «симметрия» происходит от древнегреческого σύμμετρια – пропорциональность, соразмерность, гармония, одинаковость в расположении частей. Известный американский физик лауреат Нобелевской премии Ричард Рейман (1918-1988) отмечал: нам нравится смотреть на проявления симметрии в природе, на идеально симметричные сферы планет или Солнца, на симметричные кристаллы, наконец, на цветы, которые почти симметричны. Идея симметрии находит отражение в искусстве, архитектуре технике.

Соображения симметрии часто помогают находить решения различных задач, придавая самим решениям элемент изящества и совершенства.

Математические игры отличаются от обычных тем, что в них можно заранее определить исход игры. В подобных задачах обычно вопрос один и тот же: кто и как выиграет при правильной игре, то есть при наилучшей стратегии обеих сторон.

Математические задачи-игры имеют следующие атрибуты:

- в игре участвуют два игрока, ходы которых строго чередуются;
- для каждой партии возможен лишь один из двух исходов;

 - выигрыш игрока, начинающего игру (в дальнейшем – первый игрок);
 - выигрыш игрока, делающего второй ход (в дальнейшем – второй игрок);

- игрок выбирает ход из определенного (фиксированного) множества ходов;
- игрокам известны все возможные варианты ходов, как за себя, так и за противника.

Для обучения решению олимпиадных задач на применение симметрии полезно использовать этапы работы над задачей, отраженные в блок-схеме (рис.1)

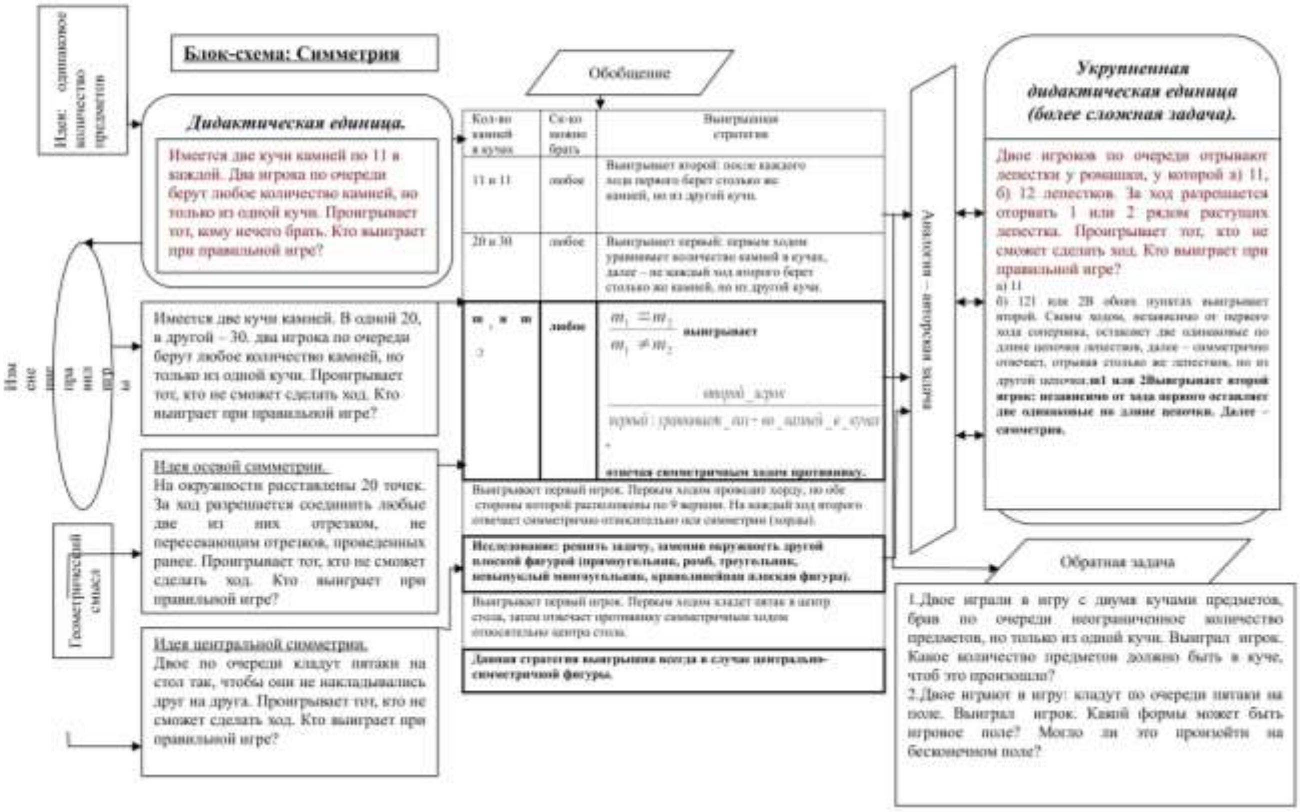


*Рисунок 1*

**Задача 1**

Двое по очереди ставят слонов в клетки шахматной доски так, чтобы слоны не били друг друга. (Цвет слонов значения не имеет). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

*Решение*

Выигрывает второй игрок, применив осевую симметрию шахматной доски. За ось симметрии можно взять прямую, разделяющую четвертую и пятую горизонтали. Симметричные относительно нее поля имеют разный цвет, и, тем самым, слон, поставленный на одно из них, не препятствует ходу на другое.

*Ответ: второй игрок.*

**Задача 2**

Имеется две кучки камней – по 7 в каждой. Двое игроков играют в игру. За ход разрешается взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выиграет при правильной игре?

*Решение*

Второй игрок побеждает при помощи симметричной стратегии: каждым своим ходом он должен брать столько же камней, сколько предыдущим ходом взял первый игрок, но из другой кучки. Таким образом, у второго игрока всегда есть ход.

*Ответ: второй игрок.*

**Задача 3**

Двое по очереди ставят коней в клетки шахматной доски так, чтобы кони не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

*Решение*

Выигрывает второй. Можно использовать и центральную, и осевую симметрию.

*Ответ: второй игрок.*

**Задача 4**

Двое по очереди ставят королей в клетки доски 9 × 9 так, чтобы короли не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

*Решение*

Выигрывает первый. Первый ход в центр доски, а затем – центральная симметрия.

*Ответ: первый игрок.*

**Задача 5**

Двое по очереди ставят слонов в клетки шахматной доски. Очередным ходом надо побить хотя бы одну небитую клетку. Слон бьет и клетку, на которой стоит. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

*Решение*

Выигрывает первый игрок, применив осевую симметрию. Идея состоит в том, что если два симметричных поля не побиты, то поля, с которых оба они бьются, также не побиты.

*Ответ: первый игрок.*

**Задача 6**

Двое по очереди ставят ладьи в клетки шахматной доски. Очередным ходом надо побить хотя бы одну небитую клетку. Ладья бьет и клетку, на которой стоит. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

*Решение*

Выигрывает первый игрок, применив центральную симметрию. Решающим соображением является то, что если два симметричных поля не побиты, то поля, с которых оба они бьются, также не побиты.

*Ответ: первый игрок.*

**Задача 7**

Дана клетчатая доска $10 \times 10$. Двое играют в игру. За ход разрешается покрыть любые 2 соседние клетки доминошкой (прямоугольником $1 \times 2$) так, чтобы доминошки не перекрывались. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

*Решение*

Выигрывает второй, применив центральную симметрию.

*Ответ: второй игрок.*

**Задача 8**

Дан прямоугольный параллелепипед размерами $4 \times 3 \times 3$, составленный из единичных кубиков. Двое играют в игру. За ход разрешается проткнуть спицей любой ряд, если в нем есть хотя бы один непроткнутый кубик. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

*Решение*

Выигрывает первый. Первым ходом он протыкает ряд, состоящий из центральных кубиков четырех слоев $3 \times 3$. Дальше – центральная симметрия.

*Ответ: первый игрок.*

**Задача 9**

Имеется k кучек камней. Число камней во всех кучах одинаково. Двое играющих берут по очереди любое число камней из любой кучи, но только из одной. Выигрывает тот, кто берет последние камни. При каком k может выиграть первый игрок при правильной игре?

*Решение*

Количество кучек должно быть нечетным числом. Первый игрок первым ходом забирает все камни в одной кучке, далее отвечает симметричным ходом на каждый ход второго игрока, забирая столько же камней, но из другой кучи.

*Ответ: k – нечетное число.*

**Задача 10**

Имеется k кучек камней. Число камней во всех кучах одинаково. Двое играющих берут по очереди любое число камней из любой кучи, но только из одной. Выигрывает тот, кто берет последние камни. При каком k может выиграть второй игрок при правильной игре?

*Решение*

Количество кучек должно быть четным числом. Каким бы ни был ход первого игрока, второй игрок отвечает симметричным ходом на каждый его ход, забирая столько же камней, но из другой кучи.

*Ответ: k – четное число.*

## Индукция

Метод доказательства утверждений типа: «Для каждого натурального числа $n$ верно, что …». Такое утверждение можно рассматривать как цепочку утверждений: «Для $n = 1$ верно, что …», «Для $n = 2$ верно, что …» и т.д.

Первое утверждение цепочки называется *базой* (или основанием) индукции. Его обычно легко проверить. Затем доказывается *шаг индукции: «Если верно утверждение с номером* $n$*, то верно утверждение с номером* $(n + 1)$*»*. Шаг индукции также можно рассматривать как цепочку переходов: «Если верно утверждение 1, то верно утверждение 2», «Если верно утверждение 2, то верно утверждение 3» и т.д.

Если верна база индукции, и верен шаг индукции, то все утверждения верны (это *принцип математической индукции*).

Иногда для доказательства очередного утверждения цепочки надо опираться на все предыдущие утверждения. Тогда индуктивный переход звучит так: *«Если верны все утверждения с номерами от 1 до* $n$*, то верно утверждение с номером* $(n + 1)$*»*.

Бывает удобен *индуктивный спуск или «обратная индукция»* - если утверждение с номером $n$ $(n > 1)$ можно свести к одному или нескольким утверждениям с меньшими номерами и первое утверждение верно, то все утверждения верны.

**Задача 1**

Докажите, что число состоящее из 243 единиц, делится на 243.

<u>*Решение*</u>

Заметим, что $243 = 3^5$. Попробуем доказать более общее утверждение, что число, составленное из $3^n$ единиц делится на $3^n$. Оказывается, это проще.

Для $n = 1$ утверждение верно (111 делится на 3).

Заметим, что 111111111=111·1001001, и вообще число из $3^n$ единиц разлагается на множители:

$$\underbrace{1\ldots1}_{3^{n+1}} = \underbrace{1\ldots1}_{3^n}\cdot 10\ldots010\ldots01$$

причем, второй множитель делится на 3 (по признаку делимости на 3). Итак, в последовательности чисел 111, 111111111, …, "$3^n$ единиц" каждое следующее равно предыдущему, умноженному на число, кратное трем. Поэтому, если $\underbrace{1 \ldots 1}_{3^{n-1}}$ делится на $3^{n-1}$, то $\underbrace{1 \ldots 1}_{3^n}$ делится на $3^n$. Теперь индукция очевидна.

*Замечание.* Мы специально не использовали слов «база индукции» и «шаг индукции», чтобы не отвлекать внимание от более существенных моментов.

**Задача 2**

На плоскости провели несколько прямых и окружностей. Докажите, что части на которые разбита плоскость, можно раскрасить в два цвета так, чтобы соседние части (граничащие по отрезку или дуге) были покрашены в разные цвета.

<u>*Решение*</u>

Сначала сотрем все прямые и окружности, но запомним где они находились. Покрасим всю плоскость в один цвет, а потом будем восстанавливать границы, перекрашивая при этом части, на которые они делят плоскость. Каждый раз, добавляя прямую, мы перекрашиваем в противоположный цвет все части, лежащие по одну ее сторону, и оставляем без изменения части, лежащие по другую сторону. Добавляя окружность, мы перекрашиваем все части, лежащие внутри нее и оставляем без изменения, лежащие снаружи. Таким образом, каждый участок любой из нарисованных линий будет являться границей двух областей разного цвета.

**Задача 3**

Докажите, что если $x + \frac{1}{x}$ - целое, то $x^n + \frac{1}{x^n}$ – тоже четное.

<u>*Решение*</u>

Пусть $T_n = x^n + \frac{1}{x^n}$ . Заметим, что $T_0 = 2$ и $T_1 = x + \frac{1}{x}$ – целые. Рассмотрим произведение $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = T_2 + 2$.

Отсюда $T_2 = T_1^2 - 2$ – целое. Обобщим идею и рассмотрим произведение

$T_nT_1 = \left(x^2 + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) + \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) = T_{n+1} + T_{n-1}$.

Отсюда получим, что $T_nT_1 = T_{n+1} + T_{n-1}$. Поэтому, если $T_n$ и $T_{n-1}$ – целые числа, то $T_{n+1}$ – тоже целое. Теперь по индукции получим, что $T_n$ – целое при всех $n$.

**Задача 4**

Пятеро разбойников добыли мешок золотого песка. Они хотят поделить его так, чтобы каждый был уверен, что он получит не меньше одной пятой золота. Никаких способов измерения у них нет, однако каждый умеет оценивать на глаз величину кучи песка. Мнения разбойников о величине куч могут расходиться. Как им поделить добычу?

<u>*Решение*</u>

*Первый способ.* Пусть сначала два разбойника поделят добычу между собой: один поделит песок на две равные, по его мнению, кучи, а второй выберет себе кучу. Затем каждый из них поделит свою кучу на три равные, по его мнению, кучи, а третий возьмет у каждого по одной куче. Затем, эти трое делят свои кучи на четыре равные, по их мнению, части, а четвертый разбойник возьмет у каждого по одной куче. Аналогично для пятого разбойника.

*Второй способ.* Найдем «самого скоромного» разбойник и отдадим ему его долю. Для этого попросим первого разбойника отделить 1/5 часть мешка и спросим второго разбойника о размере отделенной части: если он считает, что она больше 1/5, то пусть уменьшит ее до 1/5, а если считает, что она не больше 1/5, то позовем третьего разбойника и повторим процедуру. В итоге отдадим кучу тому, кто последним к ней приложил руку. Среди оставшихся разбойников опять найдем самого скоромного и отдадим ему полученную кучу и т.д.

**Задача 5**

Докажите, что нельзя построить правильный 7-угольник с вершинами в целочисленной решетке.

<u>*Решение*</u>

Допустим, что это возможно. Заметим, что сторона 7-угольника меньше радиуса описанной около него окружности. Сделаем параллельные перенос всех сторон 7-угольника в одну точку. Получим «ежик». Соединив концы «иголок ежика», получим новый правильный 7-угольник с вершинами в целых точках, но меньшего размера. Но 7-угольники с вершинами в целых точках нельзя уменьшать до бесконечности. Противоречие. Значит такой 7-угольник построить нельзя.

**Задачи для самостоятельного решения**

1. Докажите, что любое число рублей большее семи можно разменять трешками и пятерками. (Трешками и пятерками назывались купюры в 3 и 5 рублей соответственно, которые находились в обращении в Советском Союзе до 1991 года).

2. Несколько прямых делят плоскость на части. Каждая прямая «заштрихована» с одной стороны. Докажите, что у одной из частей все границы «заштрихованы» изнутри.

3. Из квадрата $128 \times 128$ вырезали одну клетку. Докажите, что эту фигуру можно замостить уголками из трех клеток.

4. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

5. Для любого натурального $k$ докажите неравенство $2^k > k$.

6. Докажите неравенство Коши: $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$, где $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n$ – неотрицательные числа.

*Указание.* Используйте более сложную схему индукции по количеству переменных; сначала по степеням двойки, потом от степени двойки к меньшему числу.

7. Четыре одинаковые банки наполнены красками на три четверти; цвета всех красок различны. Имеется возможность переливать любую часть жидкости из одной банки в другую. Можно ли во всех банках сделать одинаковую смесь? (Другой посуды нет, выливать краску нельзя.)

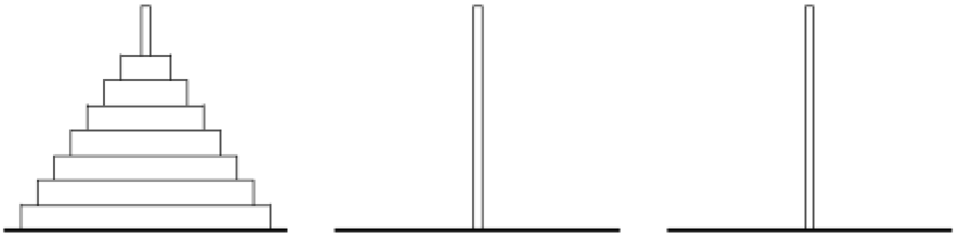
8. В городе $N$ домов. Какое наибольшее число заборов можно построить в этом городе, если 1) заборы не пересекаются, 2) каждый забор огораживает хотя бы один дом, 3) никакие два забора не огораживают одну и ту же совокупность домов?

9. Докажите, что предпоследняя цифра десятичной записи любой степени тройки четна.

10. Для любого $x \geq -1$ и натурального $n$ докажите неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

11. *Ханойская башня.* Головоломка «Ханойская башня» представляет собой три штырька, на один из которых нанизаны семь колец убывающих размеров, как показано на рисунке. Разрешается снимать по одному кольцу с любого штырька и нанизывать его на любой другой штырек, но при этом запрещается класть большее кольцо поверх меньшего. Можно ли, соблюдая эти правила, переложить все кольца на другой штырек?



# Литература


1. Бизам Д., Герцег Я./Игра и логика. 85 логических задач/перевод с венгерского Даниловой Ю.А. М.: Мир, 1975. – 360с.
2. Генкин С.А. Ленинградские математические кружки / С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. - пособие для внеклассной работы. - Киров. Изд-во «АСА», 1994. – 272с.
3. Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник. /Р.К. Гордин. - М.: МЦНМО,2003. – 112 с.
4. Гусев А.А./Математический кружок. 5-6 класс: учеб.пособие для учителей и учащихся/А.А. Гусев. М.:Мнемозина,2018. – 224 с.
5. Каннель-Белов А. Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. / А. Я. Каннель-Белов, А. К. Ковальджи. // Подготовительный сборник. - М.: МЦНМО,2015. – 96 с.
6. Коннова Е.Г./Математика. 6-11 класс. Подготовка к олимпиадам: основные идеи, темы, типы задач: учеб.пособие для учителей и учащихся/Е.Г.Коннова, В.А.Дремов, С.О.Иванов, Д.И.Ханин. Ростов-на-Дону: Легион, 2022. – 256 с.
7. Крижановский А.Ф./Математические кружки 5-7 классы: учеб. пособие для детей старше 6 лет/ А.Ф. Крижановский. М.: ИЛЕКСА, 2021. – 320с.
8. Мардахаева Е.Л./ Занятия математического кружка. 5-6 класс: учеб. пособие для учащихся общеобразоват.учреждений/ Е.Л.Мардахаева. М.:-Мнемозина,2012. – 175 с.
9. Павлов А.Н./Математические олимпиады по лигам. 5-9 класс: учеб.пособие для учителей/А.Н.Павлов. М.:Изд-во НЦ ЭНАС,2007. – 192с.
10. Спивак А.В./Тысяча и одна задача по математике. 5-7 класс: книга для учащихся/А.В.Спивак. М.:Просвещение,2010 – 207 с.
11. Эрдниев П.М. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике / П. М. Эрдниев, Б. П. Эрдниев. - Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1986. – 255с.


**Интернет - ресурсы**:

| | |
|---|---|
| http://zaba.ru | Математические олимпиады и олимпиадные задачи |
| http://www.problems.ru/. | Математические олимпиады и олимпиадные задачи |
| http://www.mccme.ru | Московский центр непрерывного математического образования (материалы кружков, олимпиад, свободно распространяемые олимпиадные книжки, видеозаписи семинаров для учителей математики и многое другое). |
| http://eek.diary.ru/p96191018.htm | Литература по подготовке к олимпиадам (электронная библиотека) |
| http://festival.1september.ru/articles/311170/ | Математический кружок |
| https://uchi.ru/ | Учи.ру |
| https://foxford.ru | Фоксфорд |
| https://kruzhok.org | Навигатор Кружкового движения НТИ |