Задача Коши для нелинейной системы уравнений акустики

Автор: Чернышова Ольга Павловна
Организация: МБОУ СОШ №2 г.Реутов

Населенный пункт: Московская область, Балашихинский район, город Реутов

В математике есть своя красота, как в живописи и поэзии.

(Н.Е. Жуковский)

Нелинейными уравнениями я занималась 3 года , учась в МГУ им. Н.П.Огарева.
Уравнения в нашей жизни появляются в начальной школе и остаются навсегда с теми, кто хочет связать свою жизнь с математикой, с “царицей наук”. Да, это сложный и кропотливый труд и не каждый сможет сидеть и выводить уравнения, доказывать теоремы и т.д. Но с каждой новой победой появляется азарт и хочется достичь большего результата. Мне хочется поделиться одним из результатов своей работы и , надеюсь, что это будет интересно и полезно моим коллегам.

Построение обобщенного решения задачи Коши для нелинейных уравнений акустики в пространстве С. Л. Соболева – Л.Н. Слободецкого.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + p(x,t)\frac{\partial p(x,t))}{\partial x} = 0, \qquad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < T, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial u(x,t))}{\partial x} = 0, \qquad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < T, \tag{1.2}$$

$$u(x,t)_{|t=0} = s(x), \qquad -\infty < x < +\infty, \tag{1.3}$$

$$p(x,t)_{|t=0} = g(x), \qquad -\infty < x < +\infty. \tag{1.4}$$

Уравнения (1.1) –(1.2) запишем в следующем виде [4]:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p^2(x,t)}{2}\right) = 0, \qquad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < T, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2(x,t)}{2}\right) = 0, \qquad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < T. \tag{1.6}$$

Рассмотрим функции $\varphi(x,t), \psi(x,t) \in C_0^\infty(D)$, где D - область в R^2 с кусочно – гладкой границей S. Из уравнений (1.5) –(1.6) можно получить

$$\frac{\partial\varphi(x,t)u(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi(x,t)\frac{p^2(x,t)}{2}\right)=\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}u(x,t)+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\frac{p^2(x,t)}{2}, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial\psi(x,t)p(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi(x,t)\frac{u^2(x,t)}{2}\right)=\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}p(x,t)+\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\frac{u^2(x,t)}{2}\ . \tag{1.8}$$

Уравнения (1.7) и (1.8) проинтегрируем по области D. Используя формулу Гаусса - Остроградского , будем иметь

$$\int_D\left[\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}u(x,t)+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\frac{p^2(x,t)}{2}\right]dxdt=\int_S\left[\varphi u\cos(n,t)+\varphi\frac{p^2}{2}\cos(n,x)\right]ds, \tag{1.9}$$

$$\int_D\left[\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}u(x,t)+\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\frac{u^2(x,t)}{2}\right]dxdt=\int_S\left[\psi p\cos(n,t)+\psi\frac{u^2}{2}\cos(n,x)\right]ds. \tag{1.20}$$

Пусть область $D=R_+^2$, тогда $S=\left(+\infty\cup(t=0)\right)$. Из уравнений (1.19) и (1.20) соответственно следует

$$\int_{t\ge 0}\left[\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}u(x,t)+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\frac{p^2(x,t)}{2}\right]dxdt-\int_{t=0}\varphi(x,0)u(x,0)dx=0, \tag{1.21}$$

$$\int_{t\ge 0}\left[\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}p(x,t)+\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\frac{u^2(x,t)}{2}\right]dxdt-\int_{t=0}\psi(x,0)p(x,0)dx=0. \tag{1.22}$$

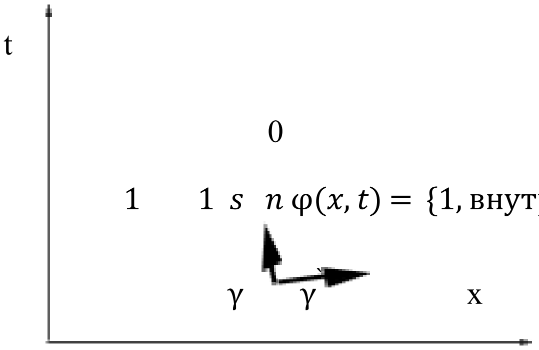
Принимая во внимание условия (1.3) и (1.4) получим постановку задачи Коши (1.1) – (1.4) в пространстве обобщенных функций С. Л. Соболева – Л.Н. Слободецкого [4]

$$\int_{t\ge 0}\left[\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}u(x,t)+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\frac{p^2(x,t)}{2}\right]dxdt-\int_{t\ge 0}\varphi(x,0)s(x)dx=0, \tag{1.23}$$

$$\int_{t\ge 0}\left[\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}p(x,t)+\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\frac{u^2(x,t)}{2}\right]dxdt-\int_{t\ge 0}\psi(x,0)g(x)dx=0. \tag{1.24}$$

2. Построение обобщенного решения задачи Коши для нелинейных

уравнений акустики на основе интегральных законов сохранения. Рассмотрим специальную функцию $\varphi(x,t)$ [2].



$\varphi(x,t) = \{1$, внутри контура γ 0, вне контура γ' 1 → 0, на полосе $\gamma\gamma'$

Тогда из (1.19) и (1.20) следует

$$\int_{t\geq 0}\left[\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}u(x,t)+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\frac{p^2(x,t)}{2}\right]dxdt=\int_{\gamma\gamma'}\left[\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}u(x,t)+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\frac{p^2(x,t)}{2}\right]dxdt, \tag{2.1}$$

$$\int_{t\geq 0}\left[\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}p(x,t)+\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\frac{u^2(x,t)}{2}\right]dxdt=\int_{\gamma\gamma'}\left[\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}p(x,t)+\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\frac{u^2(x,t)}{2}\right]dxdt. \tag{2.2}$$

Внутри узкой полосы можно предполагать, что $grad\varphi(x,t)$, $grad\psi(x,t)$ направлены по внешней нормали $n(x,t)$ к контуру γ, то есть $\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}=n_t\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial n}$, $\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}=n_x\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial n}$; $\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=n_t\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial n}$, $\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}=n_x\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial n}$. И что $u(x,t)$, $p(x,t)$ вдоль отрезка этой нормали, лежащей внутри γ,γ', почти постоянны. Интегрирование по полосе $\gamma\gamma'$ можно выполнять как интегрирование по нормали к γ (дифференциал dn) и вдоль γ (дифференциал dn). Тогда из (2.1) и (2.2) соответственно будем иметь

$$\int\limits_{\gamma\gamma'}\left[\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}u(x,t)+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\frac{p^2(x,t)}{2}\right]dxdt=\int\limits_{\gamma}ds\int\limits_{\gamma}^{\gamma'}\left[\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}u(x,t)+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\frac{p^2(x,t)}{2}\right]dn=$$

$$=\int\limits_{\gamma}ds\left[u(x,t)n_t+\frac{p^2(x,t)}{2}n_x\right]\varphi(x,t)\Big|_{\gamma}^{\gamma'}=(-1)\int\limits_{\gamma}\left[u(x,t)n_t+\frac{p^2(x,t)}{2}n_x\right]ds=$$

$$=\int\limits_{\gamma}\left[s_x u(x,t)-s_t\frac{p^2(x,t)}{2}\right]ds=\int\limits_{y}\left[u(x,t)dx-\frac{p^2(x,t)}{2}dt\right]. \qquad (2.3)$$

$$\int\limits_{\gamma\gamma'}\left[\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}p(x,t)+\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\frac{u^2(x,t)}{2}\right]dxdt=\int\limits_{\gamma}ds\int\limits_{\gamma}^{\gamma'}\left[\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}p(x,t)+\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\frac{u^2(x,t)}{2}\right]dn=$$

$$=\int\limits_{\gamma}ds\left[p(x,t)n_t+\frac{u^2(x,t)}{2}n_x\right]\psi(x,t)\Big|_{\gamma}^{\gamma'}=(-1)\int\limits_{\gamma}\left[p(x,t)n_t+\frac{u^2(x,t)}{2}n_x\right]ds=$$

$$=\int\limits_{\gamma}\left[s_x p(x,t)-s_t\frac{u^2(x,t)}{2}\right]ds=\int\limits_{y}\left[p(x,t)dx-\frac{u^2(x,t)}{2}dt\right]. \qquad (2.4)$$

Объединяя контур γ отрезок на $t=0$, получим равенства, интерпретирующие некоторые законы сохранения

$$\oint\left[u(x,t)dx-\frac{p^2(x,t)}{2}dt\right]=0, \qquad (2.5)$$

$$\oint\left[p(x,t)dx-\frac{u^2(x,t)}{2}dt\right]=0. \qquad (2.6)$$

3. Построение дивергентных разностных схем.

Построим дивергентную разностную схему на основе закона сохранения энергии [3]

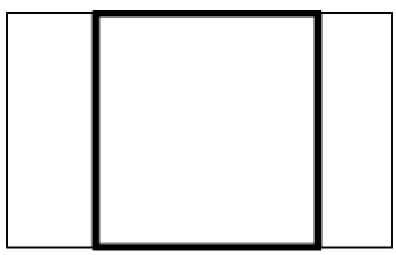
В качестве контура γ возьмем прямоугольник сетки

$x_i = ih$, $i = 0,\pm1,\pm2...$;

$t = j\tau$, $j = 0,1,...,M$,

соединив середины отрезков ячейки $[x_i, x_{i+1}]\times[t_j, t_{j+1}]$

$i-1, j+1$ $\quad$ $i, j+1$ $\quad$ $i+1, j+1$



$i-1, j$ $\qquad i, j$ $\qquad i+1, j$

и положим

$$\oint\left[u^{(h)}dx - \frac{\left(p^{(h)}\right)^2}{2}dt\right] = 0,$$

$$\oint\left[p^{(h)}dx - \frac{\left(u^{(h)}\right)^2}{2}dt\right] = 0.$$

В развернутом виде будем иметь

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x,t_j)dx - \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{p^2(x_{i+\frac{1}{2}},t)}{2}dt - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x,t_{j+1})dx + \int_{t_j}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \frac{p^2(x_{i-\frac{1}{2}},t)}{2}dt = 0, \tag{3.1}$$

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x,t_j)dx - \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{p^2(x_{i+\frac{1}{2}},t)}{2}dt - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x,t_{j+1})dx + \int_{t_j}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \frac{p^2(x_{i-\frac{1}{2}},t)}{2}dt = 0. \tag{3.2}$$

Путем усреднения решения

$$u_{ij} = \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x,t_j)dx, \qquad p_{ij} = \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} p(x,t_j)dx,$$

$$U_{ij} = \frac{1}{\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}} u(x,t_j)dt, \qquad P_{ij} = \frac{1}{\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}} p(x,t_j)dt$$

Получим дивергентную разностную схему

$$\frac{2}{\tau}\left(u_{ij+1} - u_{ij}\right) + \frac{1}{h}\left(P^2_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - P^2_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}\right) = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{2}{\tau}\left(p_{ij+1}-p_{ij}\right)+\frac{1}{h}\left(U^2_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}-U^2_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}\right)=0\ . \tag{3.4}$$

Список использованных источников

1. Моделирование газодинамических процессов, Тремасова Е. П., Бояркин Д. И. материалы научной конференции XL Огаревские чтения: секция «прикладная математика и информатика». Саранск: СВМО. – 2011. – С. 5-8
2. Численное решение многомерных задач газовой динамики, Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П., , Главная редакция физико-математической литературы изд-ва —М.: Наука., 1976. — 400 с.:ил

3. Численные методы газовой динамики, Пирумов У.Г, Росляков: учебное пособие для студентов втузов. —М.: Высш. шк.,1987. — 232 с.:ил.

4. Слободецкий Л. Н. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. – Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 1958, 197, 54-112.

Особую благодарность хочу выразить своему научному руководителю, канд. ф.-м. наук. доценту Д.И. Бояркину.