**Использование свойств монотонности функций при решении**

**уравнений**

Фурсова Ольга Ивановна,

учитель математики, МАОУ «Лицей №29», г. Тамбов

В задачниках, особенно тех, которые рекомендованы для подготовки к вступительным испытаниям в ВУЗы, можно встретить нестандартные уравнения, решаемые с использованием специальных приёмов. При решении таких уравнений учащимся потребуются более глубокие знания теоретического материала, придётся проявить сообразительность и умение рассуждать. Сложность при решении таких заданий связана ещё и с тем, что во многих школьных учебниках не делается акцент на нестандартные методы решения уравнений и учитель ограничен по времени при его изложении на уроках. Однако владение данными приёмами позволяет наиболее полно оценить уровень знаний учащегося, степень его математической подготовки. При решении уравнений и неравенств можно использовать следующие основные свойства функций: область допустимых значений, ограниченность и монотонность функции, также можно использовать чётность, периодичность функции и производную функции.

В рамках статьи мы рассмотрим уравнения и неравенства, при решении которых можно использовать свойства монотонности функций. К теме предлагаются:

- теоретическая справка;

- примеры решения задач;

- задачи для самостоятельного решения (с ответами).

**Использование свойства монотонности**

**Теорема 1.** Если на промежутке *Х* одна из функций *y=f (x), y=g (x)* убывает, а другая возрастает, то на этом промежутке *Х* уравнение *f (x) = g (x)* имеет *не боле одного корня*, то есть либо имеет только один корень (рис. 1), либо вообще не имеет корней (рис. 2)

  

**Теорема 2.** Если на промежутке *Х* функция *y = f(x)* возрастает (убывает), то на этом промежутке *Х* уравнение *f (x) = C*, где *C = const*, имеет *не более одного корня*, то есть либо имеет только один корень (рис.3), либо вообще не имеет корней (рис.4).

  

**Примеры решения задач.**

**Пример 1.**

Решите уравнение $6x^{17}+4x^{5}+5x^{3}-15=0$.

Решение:

$6x^{17}+4x^{5}+5x^{3}-15=0$.

ОДЗ: $x\in R$

Перепишем данное уравнение в виде $6x^{17}+4x^{5}+5x^{3}=15$ (1).

Уравнение (1) является уравнением вида *f(x)=c,* где

$f\left(x\right)=6x^{17}+4x^{5}+5x^{3}$, *с*=15. Функция $f\left(x\right)$ возрастает на D(f) (как сумма возрастающих функций). Следовательно, уравнение (1) имеет не более одного корня. Заметим, что $x=1$ является корнем уравнения (1). Значит, $x=1$ является корнем исходного уравнения.

Проверка: $6∙1^{17}+4∙1^{5}+5∙1^{3}-15=0$,

0=0.

Ответ: 1

**Пример 2.**

Решите уравнение $\sqrt{x}-\sqrt{5-x}=1$.

Решение:

$\sqrt{x}-\sqrt{5-x}=1$.

ОДЗ: $x\in \left[0;5\right]$

Перепишем данное уравнение в виде $\sqrt{x}=\sqrt{5-x}+1$ (2).

Уравнение (2) можно решить стандартным способом, почленно возводя (дважды) промежуточные иррациональные уравнения в квадрат, найдя корня квадратного уравнения и произведя после этого отбор корней. Однако, данное уравнение можно решить и другим способом.

Уравнение (2) является уравнением вида *f(x)=g(x),* где $f\left(x\right)=\sqrt{x}$,

$g(x)=\sqrt{5-x}+1$. $f\left(x\right)$ возрастает на D(f), $g(x)$ убывает на D(g). Следовательно, уравнение (2) имеет не более одного корня на $\left[0;5\right]$. Заметим, что $x=4$ является корнем уравнения (2). Значит, $x=4$ является корнем исходного уравнения.

Проверка: $\sqrt{4}-\sqrt{5-4}=1$, 1=1.

Ответ: 4

**Пример 3.**

Решите уравнение $2x^{13}+3x^{3}=\frac{5}{x}$.

Решение:

$2x^{13}+3x^{3}=\frac{5}{x}$ (3).

ОДЗ: $x\in \left(-\infty ;0\right)∪\left(0;+\infty \right)$

Уравнение (3) является уравнением вида *f(x)=g(x),* где $f\left(x\right)=2x^{13}+3x^{3}$, $g(x)=\frac{5}{x}$.

На промежутке $\left(-\infty ;0\right)$ функция $f\left(x\right)$ возрастает, а функция $g(x)$ убывает. Следовательно, уравнение (3) на промежутке $\left(-\infty ;0\right)$ имеет не более одного корня. Заметим, что $x=-1$ является корнем уравнения (3) на промежутке $\left(-\infty ;0\right)$.

На промежутке $\left(0;+\infty \right)$ функция $f\left(x\right)$ возрастает, а функция $g(x)$ убывает. Следовательно, уравнение (3) на промежутке $\left(0;+\infty \right)$ имеет не более одного корня. Заметим, что $x=1$ является корнем уравнения (3) на промежутке $\left(0;+\infty \right)$.

Проверка:

Если $x=1$, то $2∙1^{13}+3∙1^{3}=\frac{5}{1}$.

Если $x=-1$, то $2∙\left(-1\right)^{13}+3∙\left(-1\right)^{3}=\frac{5}{-1}$.

Ответ: $-1;1$

**Пример 4.**

Решите уравнение $8^{x}+18^{x}=2∙27^{x}$.

Решение:

$8^{x}+18^{x}=2∙27^{x}$

ОДЗ: $x\in R$

$8^{x}=2∙27^{x}-18^{x}\left|\vdots \right.18^{x}, 18^{x}>0 $

$\left(\frac{4}{9}\right)^{x}=2∙\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-1$(4).

Уравнение (4) является уравнением вида *f(x)=g(x),* где $f\left(x\right)=\left(\frac{4}{9}\right)^{x}$,

$g(x)=2∙\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-1$. $f\left(x\right)$ убывает на D(f), $g(x)$ возрастает на D(g). Следовательно, уравнение (4) имеет не более одного корня на$ R$. Заметим, что $x=0$ является корнем уравнения (4). Значит, $x=0$ является корнем исходного уравнения.

Проверка:$ 8^{0}+18^{0}=2∙27^{0}$, 1 + 1=$2∙1$.

Ответ: 0

**Пример 5.**

Определите число корней уравнения $\sqrt{2x+8}=a-\sqrt{2x+3}$ в зависимости от параметра *a.*

Решение:

$\sqrt{2x+8}=a-\sqrt{2x+3}$

ОДЗ: $x\in \left[-1,5;\left.+\infty \right)\right.$

Перепишем данное уравнение в виде $\sqrt{2x+8}+\sqrt{2x+3}=a$ (5).

Уравнение (5) является уравнением вида *f(x)=a,* где

$f\left(x\right)=\sqrt{2x+8}+\sqrt{2x+3}$, $D\left(f\right)=\left[-1,5;\left.+\infty \right)\right.$.

Функция $f\left(x\right)$ возрастает на D(f) (как сумма возрастающих функций). Следовательно, уравнение (5) имеет не более одного корня на $\left[-1,5;\left.+\infty \right)\right.$.

$f\left(x\right)$ возрастает на $\left[-1,5;\left.+\infty \right)\right.$ и $f(x)\geq f(-1,5)$, то есть $f(x)\geq \sqrt{5}$, где $x\in D(f)$. Значит множеством значений $f(x)$ является промежуток $\left[\sqrt{5};\left.+\infty \right)\right.$.

Таким образом, при $a\geq \sqrt{5}$ исходное уравнение имеет единственное решение. При $a<\sqrt{5}$ уравнение не имеет решений.

Ответ: при $a\geq \sqrt{5}$ уравнение имеет один корень, при $a<\sqrt{5}$ уравнение не имеет корней

**Пример 6.**

Решите уравнение $2∙arcsin\left(2x\right)=3∙arccosx$.

Решение:

$2∙arcsin\left(2x\right)=3∙arccosx$ (6).

ОДЗ: $x\in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

Данное уравнение является уравнением вида *f(x) = g(x)*, где

$f\left(x\right)=2∙arcsin\left(2x\right)$, $g\left(x\right)=3∙arccosx$. Функция *f(x)* возрастает на D(f), функция g(x) убывает на D (g). Следовательно, уравнение (6) имеет не более одного корня на$\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. Заметим, что $x=0,5$ является корнем уравнения (6).

Проверка: $2∙arcsin\left(2∙0,5\right)=3∙arccos\left(0,5\right)$

$2∙arcsin\left(1\right)=3∙\frac{π}{3}$

$2∙\frac{π}{2}=π$

$π=π$

Ответ: 0,5

**Пример 7.**

Решите уравнение $x^{log\_{2}9}=x^{2}∙3^{log\_{2}x}-x^{log\_{2}3}.$

Решение:

$x^{log\_{2}9}=x^{2}∙3^{log\_{2}x}-x^{log\_{2}3}$ (7).

ОДЗ: $x\in \left(0;+\infty \right)$

Уравнение (7) равносильно уравнению

$9^{log\_{2}x}=x^{2}∙3^{log\_{2}x}-3^{log\_{2}x}$ $⇔$ $\left(3^{log\_{2}x}\right)^{2}=3^{log\_{2}x}∙\left(x^{2}-1\right)$ $⇔$

$⇔3^{log\_{2}x}=x^{2}-1$(в процессе равносильных преобразований мы воспользовались свойством $a^{log\_{c}b}=b^{log\_{c}a},$ справедливым при $a>0$, $b>0$, $c>0$, $c\ne 1$).

Пусть $log\_{2}x=y$, тогда $x=2^{y}$. Последнее уравнение принимает вид

$3^{y}=\left(2^{y}\right)^{2}-1$ $⇔$ $3^{y}=4^{y}-1$ $⇔$ $3^{y}+1=4^{y}$ $⇔$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{y}+\left(\frac{1}{4}\right)^{y}=1$.Полученное уравнение является уравнением вида *f(y) =c*, где

$f\left(y\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^{y}+\left(\frac{1}{4}\right)^{y}$, c=1. Так как *f(y)* убывает на D(f), то уравнение

$\left(\frac{3}{4}\right)^{y}+\left(\frac{1}{4}\right)^{y}=1$ имеет не более одного корня. Заметим, что у=1 корень этого уравнения. Тогда, $log\_{2}x=1$, $x=2$.

Проверка: $2^{log\_{2}9}=2^{2}∙3^{log\_{2}2}-2^{log\_{2}3},$

$9=4∙3-3$,

9=9.

Ответ: 2

**Пример 8.**

Решите уравнение $x^{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

$x^{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (8).

ОДЗ: $x\in \left(0;+\infty \right)$

Уравнение (8) является уравнением вида *f(x)=c,* где $f\left(x\right)=x^{x}$, $c=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Исследуем функцию *f(x)* на монотонность.

$f^{'}\left(x\right)=\left(x^{x}\right)^{'}=\left(e^{xlnx}\right)^{'}=e^{xlnx}∙\left(xlnx\right)^{'}=x^{x}∙\left(1∙lnx+x∙\frac{1}{x}\right)=$

$=x^{x}∙\left(lnx+1\right)$.

$f^{'}\left(x\right)=0$ при $x=e^{-1}=\frac{1}{e}$.



На промежутке $\left(0;\left.\frac{1}{e}\right]\right.$ функция $f\left(x\right)=x^{x}$ убывает. Следовательно, на $\left(0;\left.\frac{1}{e}\right]\right.$ уравнение (8) имеет не более одного корня. Заметим, что $x=\frac{1}{4}$ $\left(\frac{1}{4}\in \left(0;\left.\frac{1}{e}\right]\right.\right)$ является корнем уравнения (8), так как $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(2^{-2}\right)^{\frac{1}{4}}=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

На промежутке $\left[\frac{1}{e};\left.+\infty \right)\right.$ функция $f\left(x\right)=x^{x}$ возрастает. Следовательно, на $\left[\frac{1}{e};\left.+\infty \right)\right.$ уравнение (8) имеет не более одного корня. Заметим, что $x=\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2}\in \left[\frac{1}{e};\left.+\infty \right)\right.\right)$ является корнем уравнения (8), так как $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{4};\frac{1}{2}$

**Пример 9.**

Найдите количество корней уравнения $x^{log\_{4}x^{5}}=x^{6-7x}$.

Решение:

$x^{log\_{4}x^{5}}=x^{6-7x}$ $⇔$ $log\_{4}\left(x^{log\_{4}x^{5}}\right)=log\_{4}\left(x^{6-7x}\right)$ $⇔$

$⇔log\_{4}x^{5}∙log\_{4}x=\left(6-7x\right)∙log\_{4}x$ $⇔$ $5log\_{4}^{2}x=\left(6-7x\right)∙log\_{4}x$ $⇔$

$⇔$ $5log\_{4}^{2}x-\left(6-7x\right)∙log\_{4}x=0$ $⇔$ $log\_{4}x∙\left(5log\_{4}x-\left(6-7x\right)\right)=0$ $⇔$

$⇔$ $\left[\begin{array}{c}log\_{4}x=0,\\5log\_{4}x-\left(6-7x\right),\end{array}\right.$ $⇔$ $\left[\begin{array}{c}x=1,\\log\_{4}x=\frac{1}{5}\left(6-7x\right),\end{array}\right.$ $⇔$ $\left[\begin{array}{c}x=1,\\log\_{4}x=-\frac{7}{5}x+\frac{6}{5}. (\*)\end{array}\right.$

Рассмотрим уравнение (\*) $log\_{4}x=-\frac{7}{5}x+\frac{6}{5}$ $\left(x>0\right)$.

Уравнение (\*) является уравнением вида *f(x)=g(x),* где $f\left(x\right)=log\_{4}x$ возрастает на $\left(0;+\infty \right)$, $g\left(x\right)=-\frac{7}{5}x+\frac{6}{5}$ убывает на $\left(0;+\infty \right)$. Следовательно, уравнение (\*) имеет не более одного корня. Покажем, что уравнение (\*) имеет единственный корень, не равный 1.

$log\_{4}x=-\frac{7}{5}x+\frac{6}{5}$ $⇔$ $log\_{4}x+\frac{7}{5}x-\frac{6}{5}=0$ (\*\*).

Рассмотрим функцию $p\left(x\right)=log\_{4}x+\frac{7}{5}x-\frac{6}{5}$, непрерывную на $\left(0;+\infty \right)$.

$p\left(\frac{1}{4}\right)=log\_{4}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{7}{5}∙\frac{1}{4}-\frac{6}{5}=-1+\frac{7}{20}-\frac{6}{5}<0$,

$p\left(1\right)=log\_{4}1+\frac{7}{5}∙1-\frac{6}{5}=\frac{1}{5}>0$.

Так как на отрезке $\left[\frac{1}{4};1\right]$ функция$ p\left(x\right)$ непрерывна и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то существует такое $x\_{0}\in \left(\frac{1}{4};1\right)$, что $p\left(x\_{0}\right)=0$, т.е.$ x\_{0}$ является корнем уравнения (\*).

Ответ: 2 корня

**Пример 10.**

Решите неравенство $2x^{9}-x^{5}+x>2$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f\left(x\right)=2x^{9}-x^{5}+x-2$. Найдём промежутки возрастания и убывания функции $f\left(x\right)$. $f^{'}\left(x\right)=18x^{8}-5x^{4}+1$.

Так как дискриминант квадратного трёхчлена $18y^{2}-5y+1 $является отрицательным числом и коэффициент при $y^{2}$ этого квадратного трёхчлена больше нуля, то для каждого действительного *х* имеем неравенство $f^{'}\left(x\right)>0$. Таким образом, функция *у = f (x)* является непрерывной и возрастающей на всей числовой прямой, поэтому её график может пересекать ось ОХ только в одной точке. Учитывая, что $f\left(1\right)=0$, заключаем, что множеством решений данного неравенства является промежуток $\left(1;+\infty \right)$.

Ответ:$ \left(1;+\infty \right)$.

**Пример 11.**

Решите неравенство $\left(x+1\right)∙3^{x-2}>45$

Решение:

$\left(x+1\right)∙3^{x-2}-45>0$.

ОДЗ:$ x\in R$

Если $x\leq -1$, то выражение $\left(x+1\right)∙3^{x-2}$ принимает отрицательные значения или равно нулю. Значит, исходное неравенство при $x\leq -1$ не имеет решений.

Рассмотрим функцию $f\left(x\right)=\left(x+1\right)∙3^{x-2}-45$, $D\left(f\right)=R$.

$\left.\begin{array}{c}h\left(x\right)=x+1 на \left(-1;+\infty \right)возрастает и h\left(x\right)>0 \\g\left(x\right)=3^{x-2} на \left(-1;+\infty \right)возрастает и g\left(x\right)>0\end{array}\right|⟹$

$⟹p\left(x\right)=\left(x+1\right)∙3^{x-2}$ $возрастает$ $на \left(-1;+\infty \right)$

Найдём нули функции $f\left(x\right)$ на $\left(-1;+\infty \right)$.

$\left(x+1\right)∙3^{x-2}-45=0$.

 $\left(x+1\right)∙3^{x-2}=45$ (9).

Уравнение (9) является уравнением вида *p(x)=c,* где $p\left(x\right)=\left(x+1\right)∙3^{x-2}$, с=45. Функция $p\left(x\right)$ возрастает на $\left(-1;+\infty \right)$. Следовательно, уравнение (9) имеет не более одного корня. Заметим, что $x=4$ является корнем уравнения (9) на промежутке $\left(-1;+\infty \right)$. Учитывая, что $f\left(4\right)=0$, заключаем, что множеством решений данного неравенства является промежуток $\left(4;+\infty \right)$.

Ответ: $\left(4;+\infty \right)$

**Задачи для самостоятельного решения**

1. Решите уравнение $\sqrt{37x+12}-\sqrt{31-6x}=2$.

2. Решите уравнение $32+x=\sqrt[5]{2-x}$.

3. Решите уравнение $\sqrt[3]{4x-1}+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-6}=6$.

4. Определите число корней уравнения $\sqrt{3x-5}=a-\sqrt{3x+11}$ в зависимости от параметра *a.*

5. Решите уравнение $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^{x}+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{x}=\left(2\sqrt{2}\right)^{x}$.

6. Решите уравнение $log\_{3}\left(x+2\right)=\sqrt{2-x}$.

7. Решите уравнение $log\_{2}\left(2x-x^{2}+15\right)=x^{2}-2x+5$.

8. Решите уравнение $x∙2^{x^{2}+2x+3}=64$.

9. Решите уравнение $x∙log\_{3}^{2}x-\left(2x+3\right)∙log\_{3}x+6=0$.

10. Решите неравенство $3^{x}-7>4^{\frac{1}{x}}$.

11. Решите неравенство $\frac{1-x}{1+x}<2^{x}$.

12. Решите неравенство $4arctgx<\frac{π}{x}$.

**Ответы и указания**

1. 1

2. -30

3. 7

4. При $a\geq 4$ уравнение имеет единственное решение. При $a<4$ уравнение не имеет решений.

5. 2

6. 1

7. 1

8. 1

9. 3;9

10. $\left(2;+\infty \right)$

11. $\left(-\infty ;-1\right)∪\left(0;+\infty \right)$

12. $\left(-\infty ;-1\right)∪\left(0;1\right)$