**Использование свойств монотонности функций при решении**

**уравнений**

Фурсова Ольга Ивановна,

учитель математики, МАОУ «Лицей №29», г. Тамбов

В задачниках, особенно тех, которые рекомендованы для подготовки к вступительным испытаниям в ВУЗы, можно встретить нестандартные уравнения, решаемые с использованием специальных приёмов. При решении таких уравнений учащимся потребуются более глубокие знания теоретического материала, придётся проявить сообразительность и умение рассуждать. Сложность при решении таких заданий связана ещё и с тем, что во многих школьных учебниках не делается акцент на нестандартные методы решения уравнений и учитель ограничен по времени при его изложении на уроках. Однако владение данными приёмами позволяет наиболее полно оценить уровень знаний учащегося, степень его математической подготовки. При решении уравнений и неравенств можно использовать следующие основные свойства функций: область допустимых значений, ограниченность и монотонность функции, также можно использовать чётность, периодичность функции и производную функции.

В рамках статьи мы рассмотрим уравнения и неравенства, при решении которых можно использовать свойства монотонности функций. К теме предлагаются:

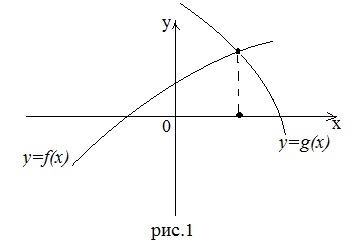
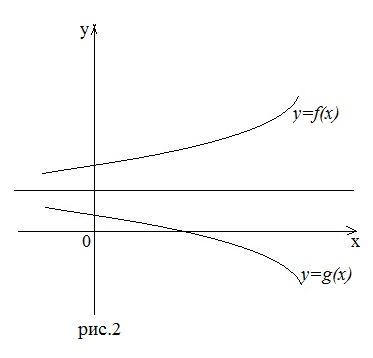
- теоретическая справка;

- примеры решения задач;

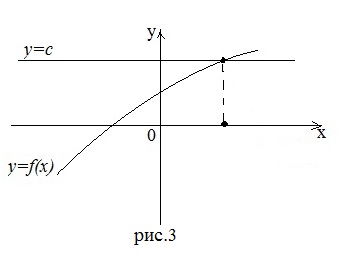
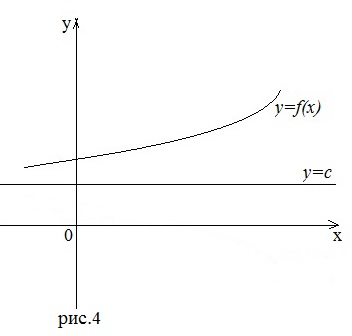
- задачи для самостоятельного решения (с ответами).

**Использование свойства монотонности**

**Теорема 1.** Если на промежутке *Х* одна из функций *y=f (x), y=g (x)* убывает, а другая возрастает, то на этом промежутке *Х* уравнение *f (x) = g (x)* имеет *не боле одного корня*, то есть либо имеет только один корень (рис. 1), либо вообще не имеет корней (рис. 2)

**Теорема 2.** Если на промежутке *Х* функция *y = f(x)* возрастает (убывает), то на этом промежутке *Х* уравнение *f (x) = C*, где *C = const*, имеет *не более одного корня*, то есть либо имеет только один корень (рис.3), либо вообще не имеет корней (рис.4).

**Примеры решения задач.**

**Пример 1.**

Решите уравнение .

Решение:

.

ОДЗ:

Перепишем данное уравнение в виде (1).

Уравнение (1) является уравнением вида *f(x)=c,* где

, *с*=15. Функция возрастает на D(f) (как сумма возрастающих функций). Следовательно, уравнение (1) имеет не более одного корня. Заметим, что является корнем уравнения (1). Значит, является корнем исходного уравнения.

Проверка: ,

0=0.

Ответ: 1

**Пример 2.**

Решите уравнение .

Решение:

.

ОДЗ:

Перепишем данное уравнение в виде (2).

Уравнение (2) можно решить стандартным способом, почленно возводя (дважды) промежуточные иррациональные уравнения в квадрат, найдя корня квадратного уравнения и произведя после этого отбор корней. Однако, данное уравнение можно решить и другим способом.

Уравнение (2) является уравнением вида *f(x)=g(x),* где ,

. возрастает на D(f), убывает на D(g). Следовательно, уравнение (2) имеет не более одного корня на . Заметим, что является корнем уравнения (2). Значит, является корнем исходного уравнения.

Проверка: , 1=1.

Ответ: 4

**Пример 3.**

Решите уравнение .

Решение:

(3).

ОДЗ:

Уравнение (3) является уравнением вида *f(x)=g(x),* где , .

На промежутке функция возрастает, а функция убывает. Следовательно, уравнение (3) на промежутке имеет не более одного корня. Заметим, что является корнем уравнения (3) на промежутке .

На промежутке функция возрастает, а функция убывает. Следовательно, уравнение (3) на промежутке имеет не более одного корня. Заметим, что является корнем уравнения (3) на промежутке .

Проверка:

Если , то .

Если , то .

Ответ:

**Пример 4.**

Решите уравнение .

Решение:

ОДЗ:

(4).

Уравнение (4) является уравнением вида *f(x)=g(x),* где ,

. убывает на D(f), возрастает на D(g). Следовательно, уравнение (4) имеет не более одного корня на. Заметим, что является корнем уравнения (4). Значит, является корнем исходного уравнения.

Проверка:, 1 + 1=.

Ответ: 0

**Пример 5.**

Определите число корней уравнения в зависимости от параметра *a.*

Решение:

ОДЗ:

Перепишем данное уравнение в виде (5).

Уравнение (5) является уравнением вида *f(x)=a,* где

, .

Функция возрастает на D(f) (как сумма возрастающих функций). Следовательно, уравнение (5) имеет не более одного корня на .

возрастает на и , то есть , где . Значит множеством значений является промежуток .

Таким образом, при исходное уравнение имеет единственное решение. При уравнение не имеет решений.

Ответ: при уравнение имеет один корень, при уравнение не имеет корней

**Пример 6.**

Решите уравнение .

Решение:

(6).

ОДЗ:

Данное уравнение является уравнением вида *f(x) = g(x)*, где

, . Функция *f(x)* возрастает на D(f), функция g(x) убывает на D (g). Следовательно, уравнение (6) имеет не более одного корня на. Заметим, что является корнем уравнения (6).

Проверка:

Ответ: 0,5

**Пример 7.**

Решите уравнение

Решение:

(7).

ОДЗ:

Уравнение (7) равносильно уравнению

(в процессе равносильных преобразований мы воспользовались свойством справедливым при , , , ).

Пусть , тогда . Последнее уравнение принимает вид

.Полученное уравнение является уравнением вида *f(y) =c*, где

, c=1. Так как *f(y)* убывает на D(f), то уравнение

имеет не более одного корня. Заметим, что у=1 корень этого уравнения. Тогда, , .

Проверка:

,

9=9.

Ответ: 2

**Пример 8.**

Решите уравнение .

Решение:

(8).

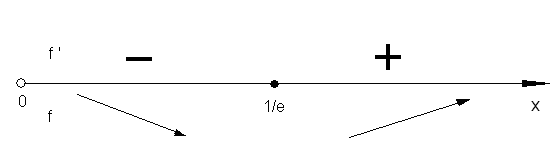
ОДЗ:

Уравнение (8) является уравнением вида *f(x)=c,* где , .

Исследуем функцию *f(x)* на монотонность.

.

при .



На промежутке функция убывает. Следовательно, на уравнение (8) имеет не более одного корня. Заметим, что является корнем уравнения (8), так как .

На промежутке функция возрастает. Следовательно, на уравнение (8) имеет не более одного корня. Заметим, что является корнем уравнения (8), так как .

Ответ:

**Пример 9.**

Найдите количество корней уравнения .

Решение:

Рассмотрим уравнение (\*) .

Уравнение (\*) является уравнением вида *f(x)=g(x),* где возрастает на , убывает на . Следовательно, уравнение (\*) имеет не более одного корня. Покажем, что уравнение (\*) имеет единственный корень, не равный 1.

(\*\*).

Рассмотрим функцию , непрерывную на .

,

.

Так как на отрезке функция непрерывна и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то существует такое , что , т.е. является корнем уравнения (\*).

Ответ: 2 корня

**Пример 10.**

Решите неравенство .

Решение:

Рассмотрим функцию . Найдём промежутки возрастания и убывания функции . .

Так как дискриминант квадратного трёхчлена является отрицательным числом и коэффициент при этого квадратного трёхчлена больше нуля, то для каждого действительного *х* имеем неравенство . Таким образом, функция *у = f (x)* является непрерывной и возрастающей на всей числовой прямой, поэтому её график может пересекать ось ОХ только в одной точке. Учитывая, что , заключаем, что множеством решений данного неравенства является промежуток .

Ответ:.

**Пример 11.**

Решите неравенство

Решение:

.

ОДЗ:

Если , то выражение принимает отрицательные значения или равно нулю. Значит, исходное неравенство при не имеет решений.

Рассмотрим функцию , .

Найдём нули функции на .

.

(9).

Уравнение (9) является уравнением вида *p(x)=c,* где , с=45. Функция возрастает на . Следовательно, уравнение (9) имеет не более одного корня. Заметим, что является корнем уравнения (9) на промежутке . Учитывая, что , заключаем, что множеством решений данного неравенства является промежуток .

Ответ:

**Задачи для самостоятельного решения**

1. Решите уравнение .

2. Решите уравнение .

3. Решите уравнение .

4. Определите число корней уравнения в зависимости от параметра *a.*

5. Решите уравнение .

6. Решите уравнение .

7. Решите уравнение .

8. Решите уравнение .

9. Решите уравнение .

10. Решите неравенство .

11. Решите неравенство .

12. Решите неравенство .

**Ответы и указания**

1. 1

2. -30

3. 7

4. При уравнение имеет единственное решение. При уравнение не имеет решений.

5. 2

6. 1

7. 1

8. 1

9. 3;9

10.

11.

12.