Муниципальноеучреждениедополнительногопрофессиональногообразования
«Центр повышения квалификации и информационно-методической работы»
г.Магнитогорска
(МУДПО «ЦПКИМР»г.Магнитогорска)

**«Математическая шкатулка» –
комплект материалов по теме «Параметр»**

Методический продукт проблемно-творческой группы
городского профессионального объединения учителей математики

Руководители ПТГ:
Нилова Н.А.,учитель математики
МАОУ «МЛ №1»,
ШоноховаЕ.Н., методист
МУДПО«ЦПКИМР»,

Магнитогорск

2023

Нилова Н.А.,Шонохова Е.Н., Канаева И.В.,«Математическая шкатулка» – комплект материалов по теме «Параметр» //Методический продукт проблемно-творческой группы городского профессионального объединения учителей математики .- 2023.- 29 с.

В сборнике представлены основные идеи и технические приёмы преобразований, составляющие базу для решения и исследования квадратных уравнений с параметром, и уравнений с параметром, сводящихся к квадратным. Отличием данного пособия является системный подход к проблеме и значительное количество разобранных примеров на исследование расположения корней квадратного трехчлена.

Предлагаемый сборник поможет старшеклассникам самостоятельно овладеть некоторыми приемами решения уравнений с параметром, а учителям – планомерно организовать работу по данной теме в классе на уроке или во внеурочной деятельности при подготовке к ЕГЭ

Комплект предназначен для учителей математики и для обучающихся 9-11классов

Авторы:

1. Нилова Н.А., учитель математики МАОУ «МЛ№1», Шонохова Е.Н.., методист МУ ДПО «ЦПКИМР» г. Магнитогорска, руководители проблемно-творческой группы городского профессионального объединения учителей математики,

2. Канаева И.В., учитель математики МОУ «МГМЛ»

Содержание

Введение

Решение задач с параметрами является одним из мощных инструментов формирования математического мышления в силу того, что они:

– обладают большими потенциальными возможностями для развития умственных операций (сравнения, аналогии, классификации, конкретизации, обобщения) и для развития способности к анализу и синтезу;

– формируют культуру логических рассуждений, что характерно для любой задачи, связанной с рассмотрением хотя бы двух альтернатив, а логическая структура решения параметрических задач, как правило, гораздо многообразнее;

– развивают гибкость мышления, которая характеризуется умением выходить за пределы привычного способа действия (так как при решении параметрических уравнений, неравенств и систем параметр может выступать как равноправная переменная) и т.п.;

– формируют целенаправленность и активность мышления, для которых характерны, например, изучение различных подходов к решению уравнений, неравенств или их систем, стремление к поиску рациональных путей решения (многие уравнения и неравенства с параметрами допускают качественно отличающиеся способы решения);

– формируют «функциональное мышление», которое характеризуется умением использовать динамику соотношений между объектами или их свойствами, видеть переменные и их изменения;

– способствуют формированию визуального мышления (так как имеют место различные графические методы анализа и решения параметрических уравнений, неравенств и их систем).

Задача с параметром даёт возможность участнику экзамена, претендующему на поступление в вуз с высокими требованиями к уровню математической подготовки, показать умение верно проводить рассуждения, проверки, преобразования. Поэтому за задачу берутся в основном выпускники с высоким уровнем подготовки. Выполнение задания является одним из характерных признаков наиболее сильной группы участников. Навыки, необходимые для верного выполнения данного задания, формируются на протяжении многих лет обучения математике.

Большинство задач так или иначе сводятся к исследованию расположения корней квадратного трехчлена в результате. В данном сборнике представлены основные идеи и технические приёмы преобразований, составляющие базу для решения и исследования задач с параметром. Основная цель – повысить математическую культуру обучающихся в рамках элементарной математики.

Материал в пособии структурирован таким образом, что изучение всех последующих тем обеспечивается предыдущими темами. Пособие дает первую часть объема знаний, умений и навыков по решению задач на исследование квадратного трехчлена, которыми должны овладеть обучающиеся.

Прогнозируемый результат:

- овладение обучающимися навыками решения квадратных уравнений с параметром, сводящихся к исследованию квадратного трехчлена;
- успешная сдача ЕГЭ профильного уровня.

Примерное тематическое планирование
(9 – 11 кл.)

№ п/п	Тематика занятий	Примерное количество часов		Предлагаемые материалы для занятий
		лекция	практика	
1..	**Понятие квадратного трехчлена. Параметр**.	**1**	**1**	
2.	**Задачи с параметром, сводящиеся к исследованию квадратного трехчлена**	**8**	**8**	
	Характеристическая точка между корнями трехчлена	1	1	Теорема 1. Примеры 1,2
	Характеристическая точка правее корней трехчлена	1	1	Теорема 2. Пример 3
	Характеристическая точка левее корней трехчлена	1	1	Теорема 3. Пример 4
	Корни трехчлена между характеристическими точками	1	1	Теорема 4. Пример 5
	Характеристические точки между корнями трехчлена	1	1	Теорема 5. Пример 6
	Характеристические точки чередуются с корнями трехчлена.	1	1	Теоремы 6,7. Пример 7
	Применение теоремы Виета	2	2	Теоремы 8-11. Примеры 8-11.
3.	**Замена переменной при решении уравнений с параметром**	**4**	**4**	
4.	**Дробно-рациональные уравнения с параметром**	**3**	**3**	
5.	**Задания формата ЕГЭ на исследование квадратного трехчлена**	**-**	**2**	
	Самоподготовка	**-**	**2**	
	Всего	**16**	**20**	

Задание **№ 22 ОГЭ** и задание **№ 17 ЕГЭ** – это задания с параметром.

Решение задач с параметрами является одним из самых трудных разделов школьной математики. При решении задач с параметрами требуется, кроме хорошего знания стандартных методов решений уравнений и неравенств, умение проводить довольно разветвленные логические построения; требуется аккуратность и внимательность для того, чтобы не потерять решения и не приобрести лишних

Задачи с параметром допускают весьма разнообразные способы решения. Наиболее распространёнными из них являются:

– чисто алгебраический способ решения;

– способ решения, основанный на построении и исследовании геометрической модели данной задачи;

– функциональный способ, в котором могут быть и алгебраические, и геометрические элементы, но базовым является исследование некоторой функции.

Зачастую (но далеко не всегда) графический метод более ясно ведёт к цели. Кроме того, в конкретном тексте решения вполне могут встречаться элементы каждого из трёх перечисленных способов

К алгебраическим методам относят методы решения заданий с параметром при всех допустимых значениях параметра, основанные на алгебраических преобразованиях (равносильные переходы, замены, использование необходимых и достаточных условий) и применении формул и приемов для решения простейших уравнений (линейных, дробно - рациональных, квадратичных, показательных, логарифмических, тригонометрических). При решении задач алгебраическим методом следует рассмотреть теоремы о корнях квадратного трехчлена.

Решения уравнений с параметрами является составной частью и естественным развитием функциональной линии обучения математике. Рассмотрение функционального метода в программе средней школы на базовом уровне носит эпизодический характер. Наиболее часто используются следующие свойства функций:

¬ свойства ограниченности области определения или области значения функции (в частности, методы оценки и минимакса);

¬ свойства четности и нечетности входящих в уравнение или неравенство функций;

¬кусочная монотонность большинства алгебраических и элементарных трансцендентных функций входящих в уравнение или неравенство (в частности, на этом основан метод рационализации);

¬ периодичность функций и др.

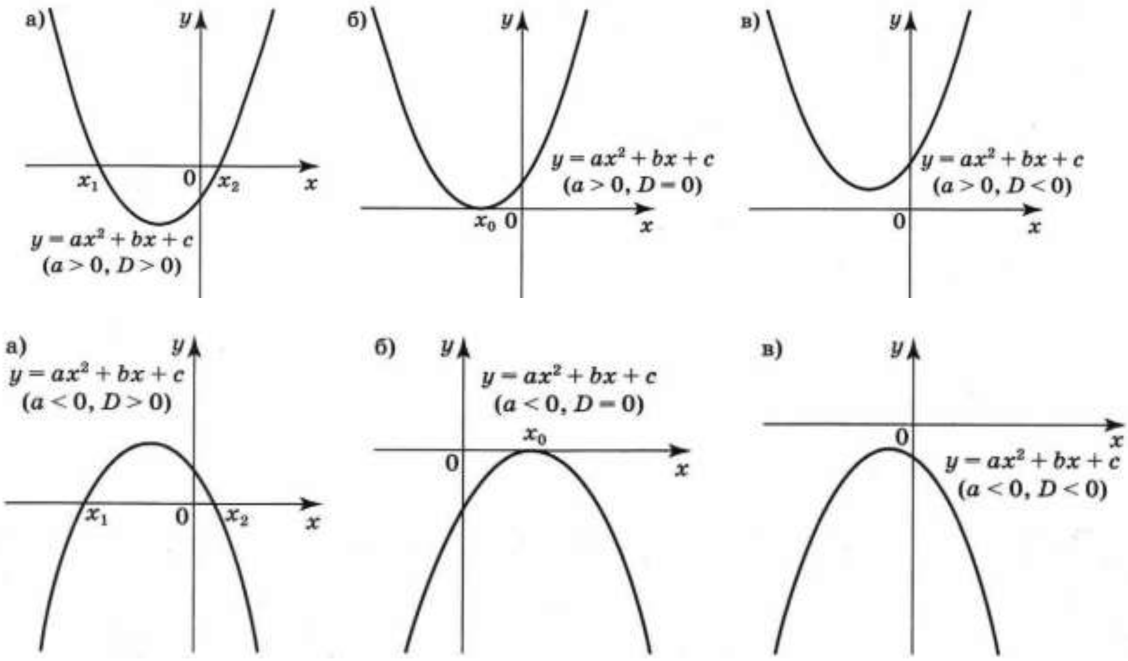
В отличие от графического метода, знание этих свойств функций позволяет находить точные корни уравнения без построения графиков функций.

Геометрический метод решения задач с параметром требует от обучающихся знания формул и геометрических образов и величин.

Квадратный трёхчлен. Параметр.

Квадратным трехчленом называется многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x – переменная, a, b, c– некоторые числа, причем $a \neq 0$. Квадратичная функция — это функция вида $f(x) = ax^2 +$

$bx + c$, где a, b и c — заданные числа. Значения x, при которых квадратный трехчлен обращается в нуль, называются корнями трехчлена. Графиком квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ является парабола. Расположение графика квадратичной функции относительно оси абсцисс связано со знаком дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$



Параметр (от греческого παραμετρων – отмеривающий) – величина, значения которой служат для различения элементов некоторого множества между собой.

Параметром называется независимая переменная величина, входящая в условие задачи или появляющаяся в процессе ее решения, «управляющая» решением задачи.

Задача, условие которой содержит или в ходе решения которой появляется хотя бы одна независимая переменная, удовлетворяющая определению понятия «параметр», называется задачей с параметрами.

Решить задачу с параметрами – это значит найти все те и только те значения параметров, при которых задача имеет решения.

При решении задач, содержащих параметр, встречаются задачи, которые условно можно разделить на два больших класса:

- в первый класс можно отнести задачи, в которых надо решить уравнение при всех возможных значениях параметров;
- ко второму классу относятся задачи, в которых надо найти не все возможные решения, а лишь те из них, которые удовлетворяют некоторым дополнительным условиям.

При решении задач с параметрами иногда удобно, а иногда просто необходимо строить графики. Эскизы графиков помогают наглядно увидеть «ход» решения.

При решении уравнений с параметрами чаще всего встречаются две задачи:

1. Найти формулы для решения уравнения, выражающие эти решения как функции от параметров. Типичный пример – формула корней квадратного уравнения.

2. Исследовать решения уравнения в зависимости от изменения значений параметров. Типичный пример - найти число корней уравнения в зависимости от параметра или определить, при каких значениях параметра уравнение не имеет корней.

Очень часто исследование корней в зависимости от параметра можно провести, не вычисляя самих корней.

Примеры простейших задач:

1) Для каждого значения параметра решить квадратное уравнение $ax^2 + 2x + 1 = 0$.

Решение. Если $a = 0$, то $2x = -1$, $x = -0{,}5$

Если $a \neq 0$, то $D = -4 - 4a$. Квадратное уравнение имеет решение при $D \geq 0$, т.е при $a \leq 1$

Если $a = 1$, то $D = 0$ и уравнение имеет один корень $x = -1$.

Если $a \neq 0$ и $a < 1$, то исходное уравнение имеет два корня $x_1 = \frac{-1-\sqrt{1-a}}{a}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{1-a}}{a} =$.

Если $a > 1$, то $D < 0$ и уравнение не имеет корней.

Ответ:. Если $a \in (-\infty; 0) \cup (0;1)$, то уравнение имеет два корня $x_1 = \frac{-1-\sqrt{1-a}}{a}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{1-a}}{a}$;

если $a = 0$, то $x = -0{,}5$; если $a = 1$, то $x = -1$; если $a > 1$, то решений нет.

2).При каких значениях параметра *a* уравнение *$ax^2 - x + 3 = 0$* имеет единственное решение?

Решение. Прежде всего, обратим внимание на распространенную ошибку: считать исходное уравнение квадратным. На самом деле это уравнение степени <u>не выше второй</u>.

1**.** Если $a = 0$, то $0 \cdot x^2 - x + 3 = 0$, $x = 3$ -данное уравнение имеет единственное решение.

2. Если $a \neq 0$, то имеем дело с квадратным уравнением. Его дискриминант равен $1 - 12a$ и принимает значение, равное нулю, при $a = \frac{1}{12}$

Ответ: $a = 0$, $a = \frac{1}{12}$

3). При каких значениях параметра *a* уравнение *$(a - 2)x^2 + (4 - 2a)x + 3 = 0$* имеет единственное решение?

Решение.

1. При $a = 2$ получим $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 3 = 0$, $0 \cdot x = -3$, уравнение не имеет решений.

2. Если $a \neq 2$, то данное уравнение – квадратное. Оно имеет единственное решение в том случае, когда дискриминант равен 0, т.е. при $a = 2$ или $a = 5$. Поскольку установили, что при $a = 2$ данное уравнение не имеет решения, то $a = 5$.

Ответ: $a = 5$.

3). При каких *a* уравнение *$ax^2 - 4x + a + 3 = 0$* имеет более одного корня?

Решение.

1. При $a = 0$ уравнение имеет единственный корень, что не удовлетворяет условию.

2. При $a \neq 0$ уравнение имеет два корня, если его дискриминант $16 - 4a^2 - 12a$ – положительный. Получаем $-4 < a < 1$. Однако в полученный промежуток (–4; 1) входит число 0, при котором данное уравнение имеет единственный корень, что не удовлетворяет условию.

Ответ. $-4 < a < 0$ *или* $0 < a < 1$

<u>Система упражнений (для самостоятельного решения):</u>

1. Решите относительно x уравнение $x^2 - 2x + c = 0$.

Ответ: *а)* $1 \pm \sqrt{1-c}$, *если* $c < 1$; *б)1, если* $c = 1$; *в)* $\emptyset$, *если* $c \epsilon (1; +\infty)$

2. Решите относительно xуравнение $mx^2 - 6x + 1 = 0$.

Ответ: *а)* $\frac{3 \pm \sqrt{9-m}}{m}$, *если* $m \,\epsilon\, (-\infty; 0) \cup (0; 9)$; *б)* $\frac{1}{6}$, *если* $m = 0$; *в)* $\frac{1}{3}$, *если* $m = 9$;
г) $\emptyset$, *если* $m \epsilon (9; +\infty)$

3. Решите относительно x уравнение: $6x^2 - 5bx + b^2 = 0$

Ответ: $\frac{5 \pm b}{12}$

4. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 - x + 3 = 0$ имеет единственный корень?

Ответ: *a=0 или* $a = \frac{1}{12}$

5. При каких значениях параметра aуравнение $ax^2 + 2x + 1 = 0$имеет два различных корня?

Ответ: $a \,\epsilon (-\infty; 0) \cup (0; 1)$

Квадратные уравнения с параметром, сводящиеся к исследованию квадратного трехчлена

Если $a = 0$, то уравнение $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, будет линейным, а не квадратным. Поэтому, первым делом при решении квадратного уравнения с параметром, необходимо смотреть на коэффициент при x^2 и рассматривать 2 случая: $a=0$ (линейное уравнение) и $a \neq 0$ (квадратное уравнение). Квадратное уравнение часто решается при помощи дискриминанта или теоремы Виета.

Чтобы решить квадратное уравнение с параметром, нужно понять, при каких значениях параметра существуют корни, и найти их, выразив через параметр.

Все варианты расположения нулей квадратичной функции на числовой прямой и соответствующие им условия представлены в таблице:

Расположение нулей квадратичной функции на числовой прямой	Необходимые и достаточные условия
$x_1 \quad x_2 \quad \alpha \quad x$	$\begin{cases} D \ge 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ x_0 < \alpha. \end{cases}$
$\alpha \quad x_1 \quad x_2 \quad x$	$\begin{cases} D \ge 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ x_0 > \alpha. \end{cases}$
$x_1 \quad \alpha \quad x_2 \quad x$	$a \cdot f(\alpha) < 0$
$\alpha \quad x_1 \quad x_2 \quad \beta \quad x$	$\begin{cases} D \ge 0, \\ a \cdot f(\alpha) > 0, \\ a \cdot f(\beta) > 0, \\ \alpha < x_0 < \beta. \end{cases}$
$\alpha \quad x_1 \quad \beta \quad x_2 \quad x$	$\begin{cases} a \cdot f(\alpha) > 0, \\ a \cdot f(\beta) < 0. \end{cases}$
$x_1 \quad \alpha \quad x_2 \quad \beta \quad x$	$\begin{cases} a \cdot f(\alpha) < 0, \\ a \cdot f(\beta) > 0. \end{cases}$
$x_1 \quad \alpha \quad \beta \quad x_2 \quad x$	$\begin{cases} a \cdot f(\alpha) < 0, \\ a \cdot f(\beta) < 0. \end{cases}$

Задачи с параметром, сводящиеся к исследованию квадратного трехчлена, решают по следующему алгоритмическому предписанию:

1) уравнение записывают в виде $f(x; a) = 0$;

2) выбирают контрольные значения параметра (в качестве контрольных значений параметра чаще всего берут такие, что D = 0, D < 0, D > 0, старший коэффициент квадратного трехчлена положительный, отрицательный, равный нулю и те значения параметра, при которых квадратный трехчлен становится неполным);

3) для каждого случая строят схематично параболу (геометрическую модель);

4) геометрическую модель описывают системой неравенств (аналитическая модель);

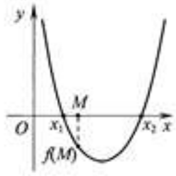
<u>Алгоритм поиска требуемых условий задач:</u>

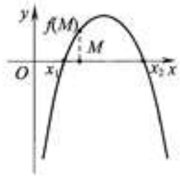
- установить, требуется ли накладывать ограничения на направление ветвей параболы;
- установить характерные точки ($x = M$, $x = N$);
- определить знак квадратного трехчлена в характерных точках;
- установить, требуется ли накладывать ограничения на знак дискриминанта;
- установить, требуется ли накладывать ограничения на абсциссу вершины параболы

Задачи с параметром часто сводятся к исследованию квадратного трехчлена с коэффициентами, зависящими от параметра. Решение каждой такой задачи можно разделить на два этапа. Первый этап состоит в переформулировке исходной задачи и сведении ее к исследованию квадратного трехчлена. Второй – в исследовании полученного квадратного трехчлена, сводящемся к определению необходимых и достаточных условий для реализации одной или нескольких возможностей. В каждом из рассматриваемых случаев вывод необходимых и достаточных условий может быть осуществлен аналитически. Однако каждый из них допускает графическую интерпретацию и позволяет достаточно просто вывести аналитические условия с использованием возможных для конкретного случая вариантов расположения графика соответствующего квадратного трехчлена.

Обозначим квадратный трехчлен ***ax² + bx + c*** через ***f(x)***

1. Для того чтобы один из корней квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ был меньше числа М, а другой - больше числа М (т.е. число М лежало бы между корнями $x_1 < M < x_2$), необходимо и достаточно выполнение условия: $af(M) < 0$





Пример 1: Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $(12a+7)x^2 + (9a-42)x + 11 - 3a = 0$ имеет корни, удовлетворяющие условию $x_1 < 1 < x_2$.

Решение: $(12a+7)(12a+7+9a-42+11-3a) < 0$

$(12a+7)(18a-24) < 0$

Ответ: $a \in \left(-\frac{7}{12}; \frac{4}{3}\right)$

Пример 2: **При каких значениях а один из корней уравнения $x^2 - 2(a+1)x + 4a + 1 = 0$ меньше 1, а другой больше1?**

Решение: $f(1) < 0 \Leftrightarrow 1 - 2a - 2 + 4a + 1 < 0 \Leftrightarrow 2a < 0$

Ответ: $(-\infty; 0)$

<u>Система упражнений (для самостоятельного решения):</u>

1. Найдите все значения параметра *а,* при которых корни уравнения $(a^2-1)x^2 + (2a+1)x - 3 = 0$ лежат по разные стороны от точки $x_0 = 1$.

Ответ: $a \in (-3; -1)$

2. Найдите все значения параметра *а,* при которых уравнение $(a^2+a+1)x^2 + (a-1)x + a^2 = 0$ имеет корни, удовлетворяющие условию $x_1 < 3 < x_2$.

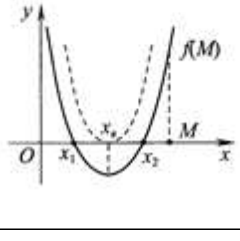
Ответ: $a \in \left(-1; -\frac{1}{5}\right)$

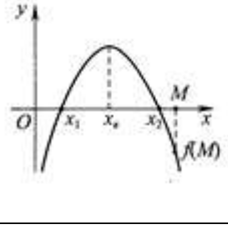
3. Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $(a-2)x^2 - 3(a+1)x - 2(a-1) = 0$ имеет два корня, причем один из корней больше 1, а другой меньше 1

Ответ: $(-\infty; -0{,}75) \cup (2; +\infty)$

2.Для того чтобы корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ были меньше числа М(т.е. число α лежало правее корней $x_1 < x_2 < M$), необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ a \cdot f(M) > 0, \\ -\frac{b}{2a} < M \end{cases}$$





Пример 3: При каких значениях параметра *a* оба корня уравнения $(a-1)x^2+(a+1)x+2a-1=0$ будут меньше 1.

Решение: $\begin{cases} (a+1)^2-4(a-1)(2a-1)\geq 0 \\ (a-1)(a-1+a+1+2a-1)>0 \\ -\dfrac{(a+1)}{2(a-1)}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7a^2+14a-3\geq 0 \\ (a-1)(4a-1)>0 \\ \dfrac{-3a+1}{2(a-1)}<0 \end{cases}$

Ответ: $a\in\left[\dfrac{7-\sqrt{28}}{7};1\right)$

<u>Система упражнений (для самостоятельного решения):</u>

1. Найдите все значения параметра а, при которых корни уравнения $x^2+(a+1)x-2a(a-1)=0$ меньше, чем 1.

Ответ: $(-0{,}5;2)$

2. Найдите все значения параметра а, при которых корни уравнения $x^2-ax-a=0$ меньше 2

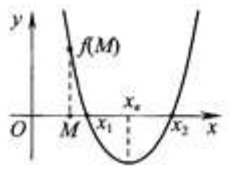
Ответ: $(-\infty;-4]\cup\left[0;\dfrac{4}{3}\right)$

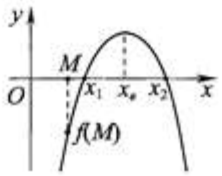
3. Найдите все значения параметра а, при которых корни уравнения $(a-1)x^2+(2a-3)x+a-3=0$ меньше 1

Ответ: $[0{,}75;1)\cup(1{,}75;+\infty)$

3.Для того чтобы корни квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ были больше числа M (т.е. лежали на числовой оси правее числа M $M<x_1<x_2$), необходимо и достаточно

выполнение условий: $\begin{cases} D\geq 0, \\ a\cdot f(M)>0, \\ -\dfrac{b}{2a}>M \end{cases}$





Пример 4: При каких значениях параметра *a* корни уравнения $ax^2-(2a+1)x+3a-1=0$ больше 1?

Решение: $\begin{cases} 4a^2+4a+1-4a(3a-1)\geq 0 \\ a-2a-1+3a-1>0 \\ \dfrac{2a+1-a}{a}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a^2-8a-1\leq 0 \\ a>1 \\ \dfrac{a+1}{a}>0 \end{cases}$

Ответ: $a\in\left(1;\dfrac{2+\sqrt{6}}{4}\right]$

<u>Система упражнений (для самостоятельного решения):</u>

1. Найдите все значения a, при которых корни уравнения $x^2-4x-(a-1)(a-5)=0$ больше, чем 1.

Ответ: $(2;4)$

2. Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $(a+3)x^2+3(a+1)x-2(a+1)=0$ больше 0,5

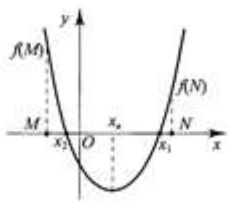
Ответ: $\left(-3;-1\dfrac{16}{17}\right)$

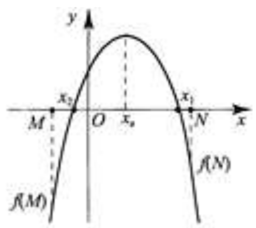
3. Найдите все значения параметра а, при которых корни уравнения $(2-a)x^2-3ax+2a=0$ больше 0,5

Ответ: $\left(\dfrac{16}{17};2\right)$

4.Для того чтобы корни квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ были больше числа M, но меньше числа N ($M<N$) (т.е. лежали в интервале между числами M и N $M<x_1<x_2<N$), необходимо и достаточно чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases} D\geq 0, \\ a\cdot f(M)>0, \\ a\cdot f(N)>0, \\ M<-\dfrac{b}{2a}<N \end{cases}$$





Пример 5: Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $(a+1)x^2-3ax+4a=0$ имеет корни, удовлетворяющие условию $2<x_1<x_2<5$.

Решение: $\begin{cases} (a+1)(2a+4)<0 \\ (a+1)(14a+25)<0 \\ -7a^2-16a\geq 0 \\ 2<\dfrac{3a}{2(a+1)}<5 \end{cases}$

Ответ: $a\in\left(-\dfrac{16}{7};-2\right)$

<u>Система упражнений (для самостоятельного решения):</u>

1. При каких значениях с уравнение $cx^2+8x+1=0$ имеет действительные корни, заключенные между -2 и 2?

   Ответ: $c\in\left(-\infty;-\dfrac{17}{4}\right)\cup\{0\}\cup\left(\dfrac{15}{4};16\right]$

2. Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $(2a-2)x^2+(a+1)x+1=0$ лежат в интервале $(-2;0)$

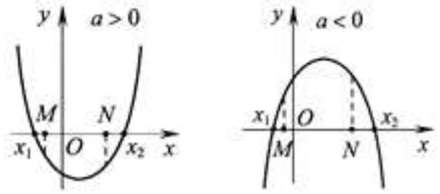
   Ответ: $\{1\}\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$

3. Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $(a-3)x^2+(a+2)x+a+5=0$

лежат в интервале $(-1;1)$

Ответ: $\left[-5\frac{1}{3};-1\frac{1}{3}\right)$

5.Для того чтобы один из корней квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ был меньше числа M, а другой больше числа N (т.е. отрезок $[M;N]$ целиком лежал между корнями $x_1<M<N<x_2$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: $\begin{cases} a\cdot f(M)<0, \\ a\cdot f(N)<0 \end{cases}$



Пример 6: Найдите все значения параметра, при которых корни квадратного трехчлена $(a^2+3a-4)x^2-(3a+1)x+1$имеют разные знаки и расположены по разные стороны от 1.

Решение: $\begin{cases} (a^2+3a-4)\cdot 1<0 \\ (a^2+3a-4)(a^2+3a-4-3a-1+1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(a+4)<0 \\ (a-1)(a+4)(a^2-4)<0 \end{cases}$

Ответ: $a\in(-4;-2)\cup(1;2)$

<u>Система упражнений (для самостоятельного решения):</u>

1. Найдите все значения параметра *a,* при которых корни x_1 и x_2 уравнение $(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0$ удовлетворяет условию $x_1<2<3<x_2$.
   Ответ: $a\in(2;5)$

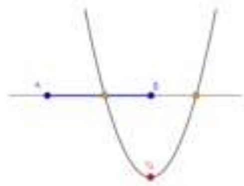
2. Найдите все значения параметра *a*, при которых отрезок $[-1;2]$ лежит между корнями уравнения $(a+2)x^2+(a-3)x+a-6=0$

Ответ: $\left(-2;\frac{4}{7}\right)$

3. Найдите все значения параметра *a*, при котором один из корней уравнения $(a-1)x^2-2ax+2+a=0$ меньше -3, а другой больше -1.

Ответ: $a\in\left(\frac{7}{16};1\right)$

6.Для того чтобы только меньший корень квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ лежал в интервале $(\alpha;\beta)$ $\alpha < x_1 < \beta < x_2$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: $\begin{cases} a\cdot f(\alpha) > 0, \\ a\cdot f(\beta) < 0 \end{cases}$



7.Для того чтобы только больший корень квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ лежал в интервале $(\alpha;\beta)$ $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: $\begin{cases} a\cdot f(\alpha) < 0, \\ a\cdot f(\beta) > 0 \end{cases}$

Пример 7: Найдите все значения параметра *a*, при которых у уравнения $(a-5)x^2+2ax+a-3=0$ один корень больше 3, а другой меньше 1.

Решение: $\begin{cases} (a-5)(a-5+2a+a-3) < 0 \\ (a-5)(9a-45+6a+a-3) < 0 \end{cases}$

Ответ: $a \in (3;5)$

<u>Система упражнений (для самостоятельного решения):</u>

1. Найдите все значения параметра *a*, при которых больший корень уравнения $(a+1)x^2+(a-4)x+a-7=0$ принадлежит промежутку $(1;2)$

   Ответ: $\left(1\frac{4}{7};3\frac{1}{3}\right)$

2. Найдите все значения параметра *a,* при которых больший корень уравнения $4x^2+2(a-1)x-a^2+a=0$ принадлежит промежутку (-1;1)

   Ответ: $\left[2;\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$

3. Найдите все значения параметра *a*, при которых только меньший корень уравнения $(a-2)x^2+(a+2)x+a-5=0$ принадлежит промежутку(1;2)

   Ответ: $\left(1\frac{2}{7};1\frac{2}{3}\right)$

8.Для того чтобы корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c были действительными и имели одинаковые знаки, необходимо и достаточно выполнение условий: $\begin{cases} D \geq 0, \\ x_1\cdot x_2 > 0 \end{cases}$

9.Для того чтобы корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c были действительными и имели разные знаки, необходимо и достаточно выполнение условий: $\begin{cases} D \geq 0, \\ x_1\cdot x_2 < 0 \end{cases}$

Пример 8: При каких значениях *a* уравнение $x^2-(2a-6)x+3a+9=0$ имеет корни разных знаков?

Решение: $D=(a-3)^2-3a-9>0;$
$3a+9<0 \Leftrightarrow a<-3$

Ответ: $(-\infty;-3)$

Пример 9: При каких значениях a квадратный трехчлен $(a-2)x^2-2ax+2a-3$ имеет два различных корня одного знака.

Решение: $\begin{cases} a^2-(a-2)(2a-3)>0 \\ \dfrac{2a-3}{a-2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2+7a-6>0 \\ \dfrac{2a-3}{a-2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(a-6)<0 \\ \dfrac{2a-3}{a-2}>0 \end{cases}$

Ответ: $a \in \left(1;\dfrac{3}{2}\right) \cup (2;6)$

<u>Система упражнений (для самостоятельного решения):</u>

1. Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение $3x^2-2(a+3)x-a^2-2a$ $=0$ имеет корни разных знаков
   Ответ: $(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$

2. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $(a+2)x^2+2ax+a-4=0$ имеет корни разных знаков
   Ответ: (-2;4)

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax^2+2ax+9=0$ имеет корни одного знака
   Ответ: $[9;+\infty)$

10.Для того чтобы корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c были действительными и положительными, необходимо и достаточно выполнение условий: $\begin{cases} D\ge 0, \\ x_1\cdot x_2>0, \\ x_1+x_2>0 \end{cases}$

11.Для того чтобы корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c были действительными и отрицательными, необходимо и достаточно выполнение условий: $\begin{cases} D\ge 0, \\ x_1\cdot x_2>0, \\ x_1+x_2<0 \end{cases}$

Пример 10: При каких значениях a уравнение $x^2-(2a-1)x+1-a=0$ имеет два различных положительных корня?

Решение: $\begin{cases} 4a^2-4a+1-4+4a>0 \\ 1-a>0 \\ 2a-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2-3>0 \\ a<1 \\ a>\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Ответ: $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};1\right)$

Пример 11: При каких значениях a уравнение $x^2-(2a+4)x-5-2a=0$ имеет два различных действительных отрицательных корня?

Решение: $\begin{cases} a^2+4a+4+5+2a>0 \\ -5-2a>0 \\ a+2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3)^2>0 \\ a<-2{,}5 \\ a<-2 \end{cases}$

Ответ: $a\in(-\infty;-3)\cup(-3;-2{,}5)$

<u>Система упражнений (для самостоятельного решения):</u>

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2-2(a+1)x+a^2-9=0$ имеет только положительные корни

   Ответ: $(3;+\infty)$

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a-2)x^2-2ax+a+3=0$ имеет только положительные корни

   Ответ: $(-\infty;-3)\cup[2;6]$

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2-ax+a-3=0$ имеет корни разных знаков, причем положительный корень по модулю больше отрицательного

   Ответ: (0;3)

Замена переменной при решении уравнений с параметром

Метод замены переменной - это один из основных методов решения сложных уравнений.

Цель метода: свести сложное уравнение к более простому путем введения новой переменной.

Суть - находим одинаковые части уравнения, содержащие переменную x^2: это могут быть либо x^2, либо целые выражения, зависящие от x^2, и обозначаем их новой переменной t. Главное, чтобы после замены в исходном уравнении не осталось переменной x^2.Далее следует решить уравнение относительно новой переменной t и затем вернуться к исходной переменной x

Пример 1: При каких значениях параметра a имеет единственное решение уравнение

$$4^x-(5a-3)2^x+4a^2-3a=0.$$

Решение: Выполним замену $2^x=t$, t>0, тогда исходное уравнение преобразуется к виду $t^2-(5a-3)t+4a^2-3a=0$. Задание свелось к нахождению таких значений a, при которых данное уравнение имеет единственное положительное решение.

$D=9a^2-18a+9=(3a-3)^2\geq 0\Rightarrow t_1=a, t_2=4a-3$- корни квадратного уравнения.

Возможны следующие случаи:

1) $\begin{cases} t_1\succ 0, \\ t_2\prec 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\succ 0, \\ 4a-3\prec 0. \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(0;\frac{3}{4}\right).$

2) $\begin{cases} t_1\prec 0, \\ t_2\succ 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\prec 0, \\ 4a-3\succ 0. \end{cases} \Leftrightarrow$ нет решений.

3) $\begin{cases} t_1=t_2 \\ t_1\succ 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4a-3, \\ a\succ 0. \end{cases} \Leftrightarrow a=1.$

4) $\begin{cases} t_1\cdot t_2=0, \\ t_1+t_2\succ 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2-3a=0, \\ 5a-3\succ 0. \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{3}{4}.$

Ответ**:** $a\in\left(0;\frac{3}{4}\right]\cup\{1\}.$

Пример 2: Найдите все значения параметра b, при которых уравнение $(b+1)4^x+2^x+1-b=0$ имеет единственный корень.

Решение: Выполним замену 2^x=t, t>0, тогда исходное уравнение преобразуется к виду $(b+1)t^2+t+1-b=0.$ Задание свелось к нахождению таких значений b, при которых данное уравнение имеет единственное положительное решение.

Если b = -1, то уравнение является линейным и имеет один корень $t=-2, t<0$. Значит, b= -1 не подходит.

Если $b\neq -1$,то уравнение является квадратным. Возможны следующие случаи:

а) Уравнение имеет два одинаковых положительных корня.

б) Один корень равен 0, а другой - положительный.

в) Один корень положительный, а другой - отрицательный.

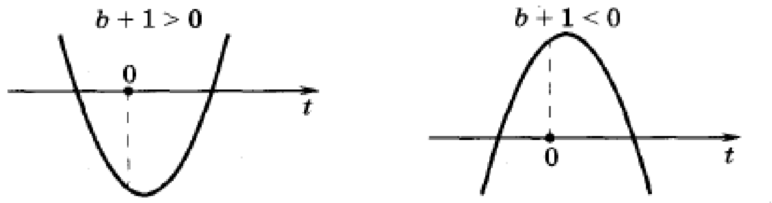
Рассмотрим эти случаи:

а) $D = 4b^2 - 3 = 0,\ b = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2};$

Если $b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $t = -\dfrac{1}{\sqrt{3}+2} \prec 0.$ Если $b = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $t = \dfrac{1}{\sqrt{3}-2} \prec 0.$

б) Если $t_1 = 0$, то $b = 1$. Получим квадратное уравнение $2t^2 + t = 0$, где $t_1 = 0$ $t_2 < 0$.

в) Покажем схематично , как должны располагаться ветви параболы $f(t) = (b+1)\cdot t^2 + t + 1 - b$, чтобы один корень был положительный, а другой - отрицательный:



Для этого должно выполняться неравенство $(b+1)\cdot f(t) \prec 0,\ (b+1)\cdot(1-b) \prec 0,\ b \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty).$

Ответ: $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty).$

Пример 3: Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $5^{2x} - 10^x + 4^{x-1}(a-2) = 0$ имеет единственный корень.

Решение: Выполним замену $\dfrac{5^x}{2^x} = t$, t>0, тогда исходное уравнение преобразуется к виду

$t^2 - t + \dfrac{(a-2)}{4} = 0$ Задание свелось к нахождению таких значений a, при которых данное уравнение имеет единственное положительное решение.

Возможны следующие случаи:

а) D = 0. Уравнение имеет два одинаковых положительных корня.

б) $D \succ 0.$ Один корень положительный, а другой нет.

Рассмотрим эти случаи:

а) $D = 3 - a = 0,\ a = 3 \Rightarrow t^2 - 1 + \dfrac{1}{4} = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2} \succ 0.$

б) Данное уравнение имеет один положительный корень, а другой нет, если квадратный трехчлен $f(t) = t^2 - t + \dfrac{(a-2)}{4}$ имеет один положительный корень. Это возможно в случае, если $\begin{cases} D > 0, \\ f(0) \le 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} 3 - a \succ 0, \\ \dfrac{a-2}{4} \le 0. \end{cases} \Rightarrow a \le 2.$$

Ответ: $(-\infty; 2] \cup \{3\}$.

<u>Система упражнений (для самостоятельного решения):</u>

Найдите все значения параметра a, при котором уравнение имеет единственное решение:

1). $36^x-(8a+5)\cdot 6^x+16a^2+20a-14=0.$

Ответ: $a\in(-1,75;0,5]$.

2). $16^x-12\cdot 4^x=a^2-2a-35.$

Ответ: $a\le -5; a=1; a\ge 7.$

3). $7^{2x}-2\cdot 21^x+(2a-1)9^x=0$

Ответ: $a\le 0,5; a=1.$

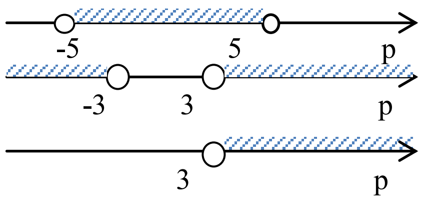
Пример 4: Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $(p-3)\cdot 4^x-8\cdot 2^x+p+3=0$ имеет два различных корня.

Решение: Выполним замену $2^x=t,\ t>0$, тогда исходное уравнение преобразуется к виду $(p-3)\cdot t^2-8\cdot t+p+3=0.$

Если $p=3$, то уравнение $(p-3)\cdot t^2-8\cdot t+p+3=0$ является линейным и имеет один корень $t=\dfrac{3}{4}$.

Если $p\ne 3$ и $t\succ 0$, то уравнение имеет два положительных корня, если квадратный трехчлен $f(t)=(p-3)\cdot t^2-8\cdot t+p+3$ имеет два положительных корня. Это возможно в следующем случае

$$\begin{cases} D\succ 0,\\ af(0)\succ 0,\\ x_0=-\dfrac{b}{2a}\succ 0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(5-p)(5+p)\succ 0,\\ (p-3)(p+3)\succ 0,\\ \dfrac{4}{p-3}\succ 0.\end{cases}\Rightarrow 3\prec p\prec 5.$$



Ответ: $(3;5)$.

<u>Система упражнений (для самостоятельного решения):</u>

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет два различных корня:

1). $(a-1)\cdot 9^x-(2a-1)\cdot 3^x-1=0$

Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2). $121^x-3a\cdot 11^x+a^2-4=0.$

Ответ: $(-\infty;4)$.

3). $25^x-2(a+1)\cdot 5^x+9a-5=0.$

Ответ: $\left(\dfrac{5}{9};1\right)\cup(6;+\infty)$.

Пример 5: При каких значениях параметра p, уравнение $(p-4)\cdot 9^x+(p+1)\cdot 3^x+2p-1=0$ не имеет решений?

Решение: Выполним замену $3^x=t,\ t>0$, тогда исходное уравнение преобразуется к виду

$(p-4)\cdot t^2+(p+1)\cdot t+2p-1=0.$

Если p = 4, то уравнение является линейным и имеет один корень $t=-\frac{7}{5}\prec 0.$

Если $p\neq 4$ и $t\succ 0,$ то уравнение не имеет решений в следующих случаях:

а) уравнение может не иметь действительных решений вообще;

б) может иметь решения, но не положительные.

а) Уравнение может не иметь действительных решений, если $D\prec 0,\ D=(p+1)^2-4(p-4)(2p-1)\prec 0,$

$-(7p-3)(p-5)\prec 0,\ (7p-3)(p-5)\succ 0,\ p\in\left(-\infty;\frac{3}{7}\right)\cup(5;+\infty).$

б) Уравнение имеет решения, но не положительные, если квадратный трехчлен $f(t)=(p-4)\cdot t^2+(p+1)\cdot t+2p-1$ имеет только неположительные корни. Это возможно в случае

$$\begin{cases} D\geq 0,\\ af(0)\geq 0,\\ x_0=-\frac{b}{2a}\prec 0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} p\in\left[\frac{3}{7};5\right],\\ (p-4)(2p-1)\geq 0,\\ -\frac{p+1}{2(p-4)}\prec 0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} p\in\left[\frac{3}{7};5\right],\\ p\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(4;+\infty),\\ p\in(-\infty;-1)\cup(4;+\infty).\end{cases}\Rightarrow p\in(4;5].$$

Ответ: $p\in\left(-\infty;\frac{3}{7}\right)\cup[4;+\infty).$

<u>Система упражнений (для самостоятельного решения):</u>

Найдите все значения параметра p, при котором уравнение не имеет решений:

1). $48\cdot 4^x+27=p+p\cdot 4^{x+2}$

Ответ: $(-\infty;3]\cup[27;+\infty).$

2). $(p-4)\cdot 9^x+(p+1)\cdot 3^x+2p-1=0$

Ответ: $\left(-\infty;\frac{3}{7}\right)\cup[4;+\infty).$

3). $(10-p)\cdot 5^{2x+1}-2\cdot 5^{x+1}+6-p=0$

Ответ: $(-\infty;5)\cup[10;+\infty).$

Дробно-рациональные уравнения с параметром

Пример 1: При каких значениях параметра a уравнение $\frac{a^3-(x+2)a^2+x^2+ax}{x+a}=0$ имеет единственный корень.

Решение: Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2-(a^2-a)x+a^3-2a^2=0,\\ x\neq -a.\end{cases}$

Исходное уравнение имеет единственный корень, если уравнение $x^2-(a^2-a)x-a^3=0$ имеет единственный корень и он не равен a. Рассмотрим возможные случаи:

1) $D=0, x\neq -a.$

$D=\left(a^2-a\right)^2-4\left(a^3-2a^2\right)=a^2\left(a-3\right)^2=0\Rightarrow a=0,a=3.$

При $a=0\Rightarrow x=0\Rightarrow x=-a,$ т.е. при $a=0$ исходное уравнение не имеет решений.

При $a=3\Rightarrow x=3\Rightarrow x\neq -a,$ т.е. при $a=3$ исходное уравнение имеет единственное решение.

2) $D\succ 0, x_1=-a, x_2\neq -a$ или наоборот

$D=a^2\left(a-3\right)^2\succ 0\Rightarrow a\neq 0, a\neq 3.$

Т.к. дискриминант квадратного уравнения - полный квадрат, найдем его корни.

$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{a^2-a-a^2+3a}{2}, \\ x_2=\dfrac{a^2-a+a^2-3a}{2} \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x_1=a, \\ x_2=a^2-2a. \end{array}\right.$ Пусть $x_1=-a, x_2\neq -a\Rightarrow\begin{cases} a=-a, \\ a^2-2a\neq -a; \end{cases}\Rightarrow$ нет решений. Пусть

$x_1\neq -a, x_2=-a\Rightarrow\begin{cases} a\neq -a, \\ a^2-2a=-a; \end{cases}\Rightarrow a=1.$

При $a=1\Rightarrow x_1=1\neq -a\Rightarrow x_2=-1,$ т.е. при $a=1$ исходное уравнение имеет единственное решение.

Следовательно, исходное уравнение единственный корень при *a = 1, a = 3*

Ответ: $\{1;3\}$.

Пример 2: При каких значениях параметра *a* уравнение $\dfrac{x-2a}{x+2}+\dfrac{x-1}{x-a}=1$ **имеет единственный корень.**

Решение: Приведем уравнение к общему знаменателю $\dfrac{x^2-\left(2a+1\right)x+2a^2+2a-2}{\left(x-a\right)\left(x+2\right)}=0$.

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2-\left(2a+1\right)x+2a^2+2a-2=0, \\ x\neq a, \\ x\neq -2. \end{cases}$

Система, а, значит. и исходное уравнение имеет единственное решение в следующих случаях:
1) Уравнение $x^2-\left(2a+1\right)x+2a^2+2a-2=0$ имеет единственный корень, не совпадающий с *x= -2* и *x = a*, т.е. $D=0, x\neq a, x\neq -2.$

$D=4a^2+4a-9=0\Leftrightarrow a=\dfrac{-1\pm\sqrt{10}}{2}.$

Если $a=\dfrac{-1\pm\sqrt{10}}{2}\Rightarrow x=\dfrac{2a+1}{2}=\dfrac{\pm\sqrt{10}}{2}$ и не совпадает ни с x=-2, ни с x = *a., т.е.* при $a=\dfrac{-1\pm\sqrt{10}}{2}$ исходное уравнение имеет единственное решение.
2) Уравнение $x^2-\left(2a+1\right)x+2a^2+2a-2=0$ имеет два корня, один из которых совпадает с *x= -2* или *x = a*.

а) Если *x = -2* имеем $4+4a+2+2a^2+2a-2=0\Leftrightarrow a^2+3a+2\Leftrightarrow a=-1, a=-2.$

При *a= -1* получим уравнение $x^2+x-2=0\Leftrightarrow x_1=-2, x_2=1.$ Второй корень не совпадает ни *x= -2,* ни с *x = a*. Тогда при *a= -1* исходное уравнение имеет единственное решение.

При *a= -2* получим уравнение $x^2+3x+2=0\Leftrightarrow x_1=-2, x_2=-1.$ Второй корень не совпадает ни *x = -2,* ни с *x = a*. Тогда при *a = -2* исходное уравнение имеет единственное решение.

б) При $x = a$ имеем $a^2 - a(2a+1) + 2a^2 + 2a - 2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + a - 2 \Leftrightarrow a = 1, a = -2.$

При $a = 1$ получим уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 2.$ Второй корень не совпадает ни $x = -2$, ни с $x = a$. Тогда при $a=1$ исходное уравнение имеет единственное решение.

Следовательно, исходное уравнение единственный корень при $a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{10}}{2}, a = -2, a = -1, a = 1.$

Ответ: $\left\{ \dfrac{-1 \pm \sqrt{10}}{2}; -2; \pm 1 \right\}$

Пример 3: При каких значениях параметра *a* уравнение $\dfrac{x^3 + x^2 - 16a^2x - 4x + a}{x^3 - 16a^2x} = 1$ **имеет единственный корень.**

Решение: В левой части уравнения выделим целую часть

$$\frac{x^3 + x^2 - 16a^2x - 4x + a}{x^3 - 16a^2x} = \frac{x^3 - 16a^2x + x^2 - 4x + a}{x^3 - 16a^2x} = 1 + \frac{x^2 - 4x + a}{x^3 - 16a^2x}.$$

Получим уравнение $1 + \dfrac{x^2 - 4x + a}{x^3 - 16a^2x} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2 - 4x + a}{x^3 - 16a^2x} = 0$

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 4x + a = 0, \\ x^3 - 16a^2x \neq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + a = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm 4a. \end{cases}$

Система, а, значит, и исходное уравнение имеет единственное решение в следующих случаях:

1) Уравнение $x^2 - 4x + a = 0$ имеет единственный корень не совпадающий ни с $x = 0,$ ни $x = \pm 4a$, т.е. $D = 0, x \neq 0, x \neq \pm 4a.$

$\dfrac{D}{4} = 4 - a = 0 \Leftrightarrow a = 4.$

Если $a = 4 \Rightarrow x = 2$ и не совпадает ни с $x = 0,$ ни $x = \pm 4a$. Тогда при $a = 4$ исходное уравнение имеет единственное решение.

2) Уравнение $x^2 - 4x + a = 0$ имеет два корня, один из которых совпадает с $x = 0, x = \pm 4a$.

а) Если $x = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 4.$

Второй корень не совпадает ни с $x = 0,$ ни $x = \pm 4a$. Тогда при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственное решение.

б) Если $x = 4a \Rightarrow 16a^2 - 15a = 0 \Rightarrow a_1 = 0; a_2 = \dfrac{15}{16}.$

При $a = \dfrac{15}{16}$ получим уравнение $16x^2 - 64x + 15 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{15}{4}; x_2 = \dfrac{1}{4}.$ Второй корень не совпадает ни с $x = 0,$ ни $x = \pm 4a$. Тогда при $a = \dfrac{15}{16}$ исходное уравнение имеет единственное решение.

в) Если $x = -4a \Rightarrow 16a^2 + 17a = 0 \Rightarrow a_1 = 0; a_2 = -\dfrac{17}{16}.$

При $a=-\frac{17}{16}$ получим уравнение $16x^2-64x-17=0 \Leftrightarrow x_1=\frac{17}{4}; x_2=-\frac{1}{4}$. Второй корень не совпадает ни с $x=0$, ни $x=\pm 4a$. Тогда при $a=-\frac{17}{16}$ исходное уравнение имеет единственное решение.

Следовательно, исходное уравнение единственный корень при $a=-\frac{17}{16}, a=0, a=\frac{15}{16}, a=4.$

Ответ**:** $\left\{-\frac{17}{16};\frac{15}{16};0;4\right\}$

<u>Система упражнений (для самостоятельного решения)</u>

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет единственный корень:

1). $\frac{(a+4)x^2+6x-1}{x+3}=0$

Ответ: $\left\{-13;-\frac{17}{9};-4\right\}$

2). $\frac{x-3a}{x+3}+\frac{x-1}{x-a}=1$

Ответ: $\left\{\frac{-3\pm 4\sqrt{3}}{3};-3;\pm 1\right\}$

3). $\frac{x^3+x^2-9a^2x-2x+a}{x^3-9a^2x}=1$

Ответ: $\left\{-\frac{7}{9};\frac{5}{9};0;1\right\}$

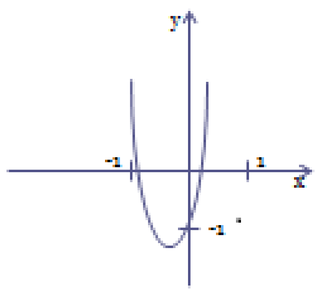
Замена переменной при решении уравнений с параметром

Пример 4: Найдите все значения параметра a, **при которых уравнение** $4\left(ax-x^2\right)+\frac{1}{ax-x^2}+4=0$ **имеет ровно два различных корня на промежутке** $[-1;1)$.

Решение: Выполним замену $ax-x^2=t$, тогда исходное уравнение преобразуется к виду

$4t+\frac{1}{t}+4=0 \Rightarrow \frac{(2t+1)^2}{t}=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{2}$. Следовательно, $ax-x^2=-\frac{1}{2}; 2x^2-2ax-1=0.$ Дискриминант данного уравнения $D=a^2+2\succ 0$, поэтому уравнение имеет два различных решения при всех значениях a.

Оба корня квадратного уравнения $2x^2-2ax-1=0$ принадлежат промежутку $[-1;1)$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} f(-1)\geq 0, \\ f(1)\succ 0; \end{cases}$ где $f(x)=2x^2-2ax-1$ и $f(0)=-1$.



$\begin{cases} 2+2a-1\geq 0, \\ 2-2a-1\succ 0; \end{cases} \Rightarrow a\in[-0,5;0,5).$

Следовательно, исходное уравнение $4\left(ax-x^2\right)+\frac{1}{ax-x^2}+4=0$ имеет ровно два различных корня на промежутке $[-1;1)$ при $a\in[-0,5;0,5)$.

Ответ: $[-0,5;0,5)$.

Пример 5: Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$6\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2-\frac{(6a+1)x}{x^2+1}-12a^2+8a-1=0$ **имеет ровно четыре решения.**

Решение: Выполним замену $\frac{x}{x^2+1}=t$, тогда исходное уравнение преобразуется к виду

$6t^2-(6a+1)t-12a^2+8a-1=0.$ Уравнение квадратное, имеет не более двух корней. Выясним, сколько корней может иметь уравнение $\frac{x}{x^2+1}=t$. Если t=0 , то уравнение линейное и x=0 - единственный корень.

Если $t\neq 0,$ то уравнение $tx^2-x+t=0$ имеет корни, если $D=1-4t^2\geq 0.$

Если $D=1-4t^2=0\Rightarrow t=\pm\frac{1}{2},$ уравнение $tx^2-x+t=0$ имеет один корень.

Если $D=1-4t^2\succ 0\Rightarrow t\in(-0,5;0)\cup(0;0,5),$ уравнение $tx^2-x+t=0$ имеет два различных корня.

Исходное уравнение $6\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2-\frac{(6a+1)x}{x^2+1}-12a^2+8a-1=0$ будет иметь четыре различных корня, если уравнение $6t^2-(6a+1)t-12a^2+8a-1=0$ имеет два различных корня, каждый из которых принадлежит промежуткам $(-0,5;0)\cup(0;0,5)$.

Дискриминант данного уравнения $D=(6a+1)^2+24(12a^2-8a+1)=324a^2-180a+25=(18a-5)^2\succ 0$,

$(18a-5)^2\succ 0\Leftrightarrow a\neq\frac{5}{18}.$

Т.к. $D=(18a-5)^2\Rightarrow t_1=2a-\frac{1}{3},t_2=-a+\frac{1}{2}.$ Для выполнения условия задачи необходимо:

$$\begin{cases} D\succ 0,\\ t_1\neq 0,\\ t_2\neq 0,\\ -\frac{1}{2}\prec t_1\prec\frac{1}{2},\\ -\frac{1}{2}\prec t_2\prec\frac{1}{2}; \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a\neq\frac{5}{18},\\ a\neq\frac{1}{6},\\ a\neq\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{12}\prec a\prec\frac{5}{12},\\ 0\prec a\prec 1. \end{cases}\Leftrightarrow a\in\left(0;\frac{1}{6}\right)\cup\left(\frac{1}{6};\frac{5}{18}\right)\cup\left(\frac{5}{18};\frac{5}{12}\right).$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{6}\right)\cup\left(\frac{1}{6};\frac{5}{18}\right)\cup\left(\frac{5}{18};\frac{5}{12}\right)$.

<u>Система упражнений</u>**<u>(для самостоятельного решения):</u>**

1). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(ax-x^2)+\frac{1}{ax-x^2}+2=0$ имеет ровно два различных корня на промежутке $(-2;2]$.

Ответ: $(-1,5;1,5]$.

2). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$\left(x+\frac{1}{x-a}\right)^2-(a+9)\left(x+\frac{1}{x-a}\right)+2a(9-a)=0$ имеет ровно четыре различных решения.

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(2;3)\cup\left(3;\frac{7}{2}\right)\cup\left(\frac{11}{2};+\infty\right)$.

3). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left(x+\frac{1}{x-a}\right)^2-(3a+6)\left(x+\frac{1}{x-a}\right)+18a=0$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(1;2)\cup(2;4)\cup(8;+\infty)$.

Задания формата ЕГЭ
на исследование квадратного трехчлена

Пример 1: Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{x^2-4x+a}{5x^2-6ax+a^2}=0$ имеет

два различных корня.

Решение: Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2-4x+a=0, \\ 5x^2-6ax+a^2\neq 0. \end{cases}$

Квадратное уравнение $x^2-4x+a=0$ имеет два различных корня, если $\frac{D}{4}=4-a\succ 0\Rightarrow a\prec 4$.

Решим уравнение $5x^2-6ax+a^2=0$ по теореме Виета: $x_1+x_2=\frac{6a}{5};x_1\cdot x_2=\frac{a^2}{5};$ т.е. $x_1=a;x_2=\frac{a}{5}$.

Т.к. $5x^2-6ax+a^2\neq 0\Rightarrow x_1\neq a;x_2\neq\frac{a}{5}$. Эти полученные значения не должны удовлетворять

квадратному уравнению $x^2-4x+a=0$.

Если $x=a$, то $a^2-4a+a\neq 0\Rightarrow a\neq 0, a\neq 3$.

Если $x=\frac{a}{5}$, то $\frac{a^2}{25}-\frac{4a}{5}+a\neq 0\Rightarrow a\neq 0, a\neq -5$.

Следовательно, исходное уравнение имеет ровно два различных корня при

$a\in(-\infty;-5)\cup(-5;0)\cup(0;3)\cup(3;4)$.

Ответ: $(-\infty;-5)\cup(-5;0)\cup(0;3)\cup(3;4)$.

Пример 2: Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{x^2-2x+a^2-6a}{x^2+x-a}=0$ имеет

два различных корня.

Решение: Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2-2x+a^2-6a=0, \\ x^2+x-a\neq 0. \end{cases}$

Квадратное уравнение $x^2-2x+a^2-6a=0$ имеет два различных корня, если

$\dfrac{D}{4}=1-a^2+6a\succ 0\Rightarrow a^2-6a+1\prec 0;\ a\in\left(3-\sqrt{10};3+\sqrt{10}\right).$

Т.к. $x^2+x-a\neq 0\Rightarrow a\neq x^2+x.$ Тогда $a=x^2+x$ не должно удовлетворять квадратному уравнению $x^2-2x+a^2-6a=0$. Подставим и получим

$x^2-2x+\left(x^2+x\right)^2-6\left(x^2+x\right)\neq 0,$

$x^4+2x^3-4x^2-8x\neq 0,$

$x\left(x+2\right)^2\left(x-2\right)\neq 0\Rightarrow x\neq -2, x\neq 0, x\neq 2.$

Если $x\neq -2,$ то $a\neq 2.$

Если $x\neq 0,$ то $a\neq 0.$

Если $x\neq 2,$ то $a\neq 6.$

Следовательно, исходное уравнение имеет ровно два различных корня при $a\in\left(3-\sqrt{10};0\right)\cup\left(0;2\right)\cup\left(2;6\right)\cup\left(6;3+\sqrt{10}\right).$

Ответ: $\left(3-\sqrt{10};0\right)\cup\left(0;2\right)\cup\left(2;6\right)\cup\left(6;3+\sqrt{10}\right).$

<u>Система упражнений</u> **<u>(для самостоятельного решения):</u>**

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет два различных корня:

1). $\dfrac{x^2-2x+a^2-4a}{x^2-a}=0.$

Ответ: $\left(2-\sqrt{5};0\right)\cup\left(0;1\right)\cup\left(1;4\right)\cup\left(4;2+\sqrt{5}\right).$

2). $\dfrac{2a-x^2+3x}{x-a^2}=0.$

Ответ: $\left(-\dfrac{9}{8};-1\right)\cup\left(-1;0\right)\cup\left(0;2\right)\cup\left(2;+\infty\right).$

3). $\dfrac{x^2-6x+a^2-4a}{x^2-a^2}=0.$

Ответ: $\left(2-\sqrt{13};-1\right)\cup\left(-1;0\right)\cup\left(0;5\right)\cup\left(5;2+\sqrt{13}\right).$

4). $\dfrac{x^2-6x+a^2+2a}{2x^2-ax-a^2}=0.$

Ответ: $\left(-1-\sqrt{10};-4\right)\cup\left(-4;0\right)\cup\left(0;2\right)\cup\left(2;-1+\sqrt{10}\right).$

5). $\dfrac{x^2+6x-a}{7x^2-9ax+2a^2}=0.$

Ответ: $(-9;-8,75)\cup(-8,75;-5)\cup(-5;0)\cup(0;+\infty)$.

6). $\dfrac{9x^2-a^2}{3x-9-2a}=0.$

Ответ: $(-\infty;-9)\cup(-9;-3)\cup(-3;0)\cup(0;+\infty)$.

7). $\dfrac{x^2-x+a}{x^2+7x+a^2+11a}=0.$

Ответ: $(-\infty;-12)\cup(-12;-6)\cup(-6;-2)\cup(-2;0)\cup(0;0,25)$.

8). $\dfrac{x^2+2x+a}{x^2+8x+a^2+6a}=0.$

Ответ: $(-\infty;-8)\cup(-8;-3)\cup(-3;0)\cup(0;1)$.

Литература

1. Беляева Э.С. Математика. Уравнения и неравенства с параметром в 2 частях -М.: Дрофа, 2009
2. В.С. Высоцкий. Задачи с параметрами при подготовке к ЕГЭ. – М.: Научный мир, 2011
3. Дихтярь М.Б. Квадратные уравнения и уравнения с квадратным трехчленом, 2003г.-60с.
4. ЕГЭ 2021. Математика. Профильный уровень. 37 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / Под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2021.
5. Ефремова Т.П. Задачи с параметром с нуля до ЕГЭ. Учебное пособие для 7-11 классов.-СПб.: ООО «Книжный дом», 2009.-128с.
6. Колесникова С.И. Задачи с параметром. ЕГЭ. М.: ООО»Азбука-2000», 2012
7. Козко А.И., Задачи с параметром и другие сложные задачи.- М.: МЦНМО, 2007.- 296с.
8. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2021. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2021 года : учебно-методическое пособие / под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Калабухова. – Ростов-на-Дону. Легион, 2020.
9. Севрюков П.Ф., Смоляков А.Н. Школа решения задач с параметрами: учебно-методическое пособие. – М.: Илекса; Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2009
10. Панферов В.С., Сергеев И.Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач;ФИПИ. – М.: Интеллект-Центр, 2012
11. Потапов М.К., Шевкин А.В. Алгебра и начала анализа. Дидактические материалы. 11 класс : учебное пособие для общеобразовательных организаций : базовый и углублённый уровни. – 13-е изд. – М.: Просвещение, 2020.
12. Прокофьев А.А. Задачи с параметрами.- М.: МИЭТ, 2004
13. Шахмейстер А.Х Задачи с параметрами в ЕГЭ: СПб «Че-Ро на Неве», 2004.
14. Шевкин А.В. Математика. Трудные задачи ЕГЭ. Задачи с параметром : профильный уровень. – М.: Просвещение, 2020.

Интернет-ресурсы:

https://math-ege.sdamgia.ru/ -	Сдам ГИА (Обучающая система Дмитрия Гущина)
http://tgmatem.tilda.ws/page14132718.html	ГИА по математики (сайт ТГ учителей математики г. Магнитогорска)
https://sites.google.com/view/trainers-in-matem/зал-подготовки-к-егэ	Зал подготовки к ЕГЭ (тренажеры Елены Стародубцевой)
https://egematem.emdesell.ru/site/	Курсы подготовки к выполнению заданий ЕГЭ (сайт Натальи Ниловой)
https://egemaximum.ru/category/17/	Путеводитель по задачам с параметром (сайт Елены Репиной)
https://mat-ege.ru/	Подготовка к ЕГЭ (сайт Максима Семенихина)
https://www.mathm.ru/index.html	Математический портал (сайт Юрия Алексенцева)