**Теория вероятностей и матстатистика. Краткий курс.**

|  |  |
| --- | --- |
|  | *Волкова Н.М., учитель математики МАОУ СШ № 159, г.Красноярск*  *Миронова М.С. , учитель математики МАОУ СШ № 159, г.Красноярск* |

План:

1. Начала теории вероятностей
2. События, виды событий
3. Вероятность
4. Теоремы сложения и умножения
5. Условная вероятность
6. Комбинаторика. Факториал. Перестановки. Сочетания. Размещения.
7. Формула Байеса
8. Испытания Бернулли.
9. Математическая статистика. Выборка. Числовые характеристики и их смысл.

***1.Начала теории вероятностей***

Возникновение теории вероятностей как [науки](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D1%83%D0%BA%D0%B0) относят к [средним векам](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%B2%D0%B5%D0%BA%D0%B0) и первым попыткам [математического анализа](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7) [азартных игр](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B7%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B8%D0%B3%D1%80%D0%B0)  ([орлянка](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%80%D0%BB%D1%8F%D0%BD%D0%BA%D0%B0), [кости](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%B3%D1%80%D0%B0_%D0%B2_%D0%BA%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8), [рулетка](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D1%83%D0%BB%D0%B5%D1%82%D0%BA%D0%B0)). Первоначально её основные понятия не имели строго математического вида, к ним можно было относиться как к некоторым [эмпирическим фактам](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BC%D0%BF%D0%B8%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%84%D0%B0%D0%BA%D1%82), как к свойствам реальных событий, и они формулировались в наглядных представлениях. Самые ранние работы учёных в области теории вероятностей относятся к XVII веку. Исследуя прогнозирование выигрыша в азартных играх, [Джероламо Кардано](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B6%D0%B5%D1%80%D0%BE%D0%BB%D0%B0%D0%BC%D0%BE_%D0%9A%D0%B0%D1%80%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%BE" \o "Джероламо Кардано), [Блез Паскаль](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%BB%D0%B5%D0%B7_%D0%9F%D0%B0%D1%81%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8C" \o "Блез Паскаль) и [Пьер Ферма](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%8C%D0%B5%D1%80_%D0%A4%D0%B5%D1%80%D0%BC%D0%B0) открыли первые вероятностные закономерности, возникающие при бросании костей. Под влиянием поднятых и рассматриваемых ими вопросов решением тех же задач занимался и [Христиан Гюйгенс](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A5%D1%80%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B8%D0%B0%D0%BD_%D0%93%D1%8E%D0%B9%D0%B3%D0%B5%D0%BD%D1%81). При этом с перепиской Паскаля и Ферма он знаком не был, поэтому методику решения изобрёл самостоятельно. Его работа, в которой вводятся основные понятия теории вероятностей (понятие вероятности как величины шанса; математическое ожидание для дискретных случаев, в виде цены шанса), а также используются теоремы сложения и умножения вероятностей (не сформулированные явно), вышла в печатном виде на двадцать лет раньше ([1657 год](https://ru.wikipedia.org/wiki/1657_%D0%B3%D0%BE%D0%B4)) издания писем Паскаля и Ферма ([1679 год](https://ru.wikipedia.org/wiki/1679_%D0%B3%D0%BE%D0%B4)).

Важный вклад в теорию вероятностей внёс [Якоб Бернулли](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AF%D0%BA%D0%BE%D0%B1_%D0%91%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%83%D0%BB%D0%BB%D0%B8): он дал доказательство [закона больших чисел](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B0%D0%BA%D0%BE%D0%BD_%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%88%D0%B8%D1%85_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%BB) в простейшем случае независимых испытаний.

В XVIII веке важное значение для развития теории вероятностей имели работы [Томаса Байеса](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B0%D0%B9%D0%B5%D1%81,_%D0%A2%D0%BE%D0%BC%D0%B0%D1%81), сформулировавшего и доказавшего [Теорему Байеса](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%91%D0%B0%D0%B9%D0%B5%D1%81%D0%B0).

В первой половине [XIX века](https://ru.wikipedia.org/wiki/XIX_%D0%B2%D0%B5%D0%BA) теория вероятностей начинает применяться к анализу ошибок наблюдений: [Виктор Буняковский](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D1%83%D0%BD%D1%8F%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9,_%D0%92%D0%B8%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80_%D0%AF%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%BB%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87), продолжая исследования [Михаила Остроградского](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%81%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%B4%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9,_%D0%9C%D0%B8%D1%85%D0%B0%D0%B8%D0%BB_%D0%92%D0%B0%D1%81%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87), в своих работах вывел первые основные формулы; [Лаплас](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B0%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D1%81) и [Пуассон](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%83%D0%B0%D1%81%D1%81%D0%BE%D0%BD,_%D0%A1%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D0%BE%D0%BD_%D0%94%D0%B5%D0%BD%D0%B8) доказали первые предельные теоремы. [Карл Гаусс](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B0%D1%83%D1%81%D1%81,_%D0%9A%D0%B0%D1%80%D0%BB) детально исследовал нормальное распределение случайной величины (см. график выше), также называемое «распределением Гаусса».

Во второй половине [XIX века](https://ru.wikipedia.org/wiki/XIX_%D0%B2%D0%B5%D0%BA) значительный вклад внёс ряд европейских и русских учёных: [П. Л. Чебышёв](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B5%D0%B1%D1%8B%D1%88%D1%91%D0%B2,_%D0%9F%D0%B0%D1%84%D0%BD%D1%83%D1%82%D0%B8%D0%B9_%D0%9B%D1%8C%D0%B2%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87), [А. А. Марков](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%80%D0%BA%D0%BE%D0%B2,_%D0%90%D0%BD%D0%B4%D1%80%D0%B5%D0%B9_%D0%90%D0%BD%D0%B4%D1%80%D0%B5%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87_(%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%80%D1%88%D0%B8%D0%B9)) и [А. М. Ляпунов](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D1%8F%D0%BF%D1%83%D0%BD%D0%BE%D0%B2,_%D0%90%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B0%D0%BD%D0%B4%D1%80_%D0%9C%D0%B8%D1%85%D0%B0%D0%B9%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87). В это время были доказаны [закон больших чисел](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B0%D0%BA%D0%BE%D0%BD_%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%88%D0%B8%D1%85_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%BB), [центральная предельная теорема](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0), а также разработана теория [цепей Маркова](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D0%B5%D0%BF%D0%B8_%D0%9C%D0%B0%D1%80%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%B0).

Современный вид теория вероятностей получила благодаря [аксиоматизации](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BA%D1%81%D0%B8%D0%BE%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0_%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%BC%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0), предложенной [Андреем Николаевичем Колмогоровым](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%BC%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B2,_%D0%90%D0%BD%D0%B4%D1%80%D0%B5%D0%B9_%D0%9D%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B0%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87). В результате теория вероятностей приобрела строгий математический вид и окончательно стала восприниматься как один из [разделов математики](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B7%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%8B_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B8).

В природе, да и в обыденной жизни мы часто имеем дело с явлениями случайными, то есть с ситуациями, исход которых нельзя точно предвидеть.

***2.События, виды событий***

Различают следующие виды случайных событий: достоверные, невозможные и случайные. События обозначаются большими латинскими буквами А, В, С,...,Z. **Достоверное** событие всегда происходит в результате наблюдения или испытания.

**Невозможное** событие никогда не происходит в результате наблюдения или испытания. Пример. Если в корзине только персики, то достать из корзины персик является достоверным событием, а достать лимон является невозможным событием.

**Случайное событие** – это такое событие, которое в результате наблюдения или испытания может произойти, а может и не произойти.

Пример. Студент сдаёт экзамен. Экзамен сдан. Это событие случайное, так как студент мог и не сдать экзамен.

Кроме того, события могут быть совместными и несовместными, зависимыми или независимыми. Два события называются **совместными**, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании. Примеры совместных событий: два стрелка стреляют по мишени, два спортсмена одновременно бегут. Случайные события А и В называются **несовместными**, если при данном испытании появление одного из них исключает появление другого события. Несовместные события: день и ночь, студент одновременно едет на занятие и сдаёт экзамен, число иррациональное и чётное.

Событие А называется **независимым** от события В, если вероятность появления события А не зависит от того произошло событие В или нет. Пример. Два студента одновременно сдают экзамен независимо друг от друга. Это событие совместное и независимое. Событие А называется **зависимым** от события В, если вероятность появления события А зависит от того произошло или не произошло событие В. Пример. Задача про шары, если шар вынутый первым-не возвращается в урну, то результат второго испытания зависит от исхода первого.

**Равновозможные события** – это такие события, которые имеют одинаковые возможности для их появления. **Полная группа событий** – это совокупность единственно возможных событий при данном испытании.

***Пример.*** Студент может сдать экзамен на любую оценку. В данном случае возможны следующие события: студент может сдать экзамен на 5, студент может сдать экзамен на 4, студент может сдать экзамен на 3. Эти события образуют полную группу.

**Противоположные события.** Два случайные события А и В называются противоположными, если они несовместны и образуют полную группу событий. Примеры: студент может сдать или не сдать экзамен, день и ночь.

Конкретный результат испытания называется элементарным событием. Совокупность всех возможных, различных, конкретных исходов испытаний называется множеством элементарных событий.

**Сложным событием (исходом)** называется произвольное подмножество множества элементарных событий. Сложное событие в результате испытания наступает тогда и только тогда, когда в результате испытаний произошло элементарное событие, принадлежащее сложному. Например, испытание – подбрасывание кубика. Элементарное событие – выпадение грани с числом «5». Сложное событие – выпадение грани с нечётным числом.

***3.Вероятность***

Вероятностью события A в некотором испытании называют отношение:

P (A) = m/n, где n — общее число всех равновозможных, элементарных исходов этого испытания, а m — количество элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A.

Свойства вероятности:

-Вероятность достоверного события равна единице.

-Вероятность невозможного события равна нулю.

-Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

-Сумма вероятностей всех событий в испытаниях равна единицы.

- Вероятность ≤ 1.

Вероятность события А = (Число благоприятных для события А исходов)/(Общее число всех возможных исходов)

**Пример 1.** В корзине 9 красных шаров и 3 синих. Шары различаются только цветом. Наугад (не глядя) достаём один из них. Какова вероятность того, что выбранный таким образом шар окажется синего цвета?

**Комментарий.** В задачах по теории вероятности происходит нечто (в данном случае наше действие по вытаскиванию шара), что может иметь разный результат - исход. Нужно заметить, что на результат можно смотреть по-разному. "Мы вытащили какой-то шар" - тоже результат. "Мы вытащили синий шар" - результат. "Мы вытащили именно вот этот шар из всех возможных шаров" - такой наименее обобщенный взгляд на результат называется элементарным исходом. Именно элементарные исходы имеются в виду в формуле для вычисления вероятности.

**Решение.** Теперь вычислим вероятность выбора синего шара.  
Событие А: "выбранный шар оказался синего цвета"  
Общее число всех возможных исходов: 9+3=12 (количество всех шаров, которые мы могли бы вытащить)  
Число благоприятных для события А исходов: 3 (количество таких исходов, при которых событие А произошло, - то есть, количество синих шаров)  
P(A)=3/12=1/4=0,25  
Ответ: 0,25

Посчитаем для той же задачи вероятность выбора красного шара.  
Общее число возможных исходов останется тем же, 12. Число благоприятных исходов: 9. Искомая вероятность: 9/12=3/4=0,75

**Пример 2.** Конференция длится три дня. В первый и второй день выступают по 15 докладчиков, в третий день – 20. Какова вероятность того, что доклад профессора М. выпадет на третий день, если порядок докладов определяется жеребьевкой?

Что здесь является элементарным исходом? – Присвоение докладу профессора какого-то одного из всех возможных порядковых номеров для выступления. В жеребьевке участвует 15+15+20=50 человек. Таким образом, доклад профессора М. может получить один из 50 номеров. Значит, и элементарных исходов всего 50.  
А какие исходы благоприятные? – Те, при которых окажется, что профессор будет выступать в третий день. То есть, последние 20 номеров.  
По формуле вероятность P(A)= 20/50=2/5=4/10=0,4  
Ответ: 0,4

**Пример 3.** В жеребьевке участвуют 5 немцев, 8 французов и 3 эстонца. Какова вероятность того, что первым (/вторым/седьмым/последним – не важно) будет выступать француз.

Количество элементарных исходов – количество всех возможных людей, которые могли бы по жеребьевке попасть на данное место. 5+8+3=16 человек.  
Благоприятные исходы – французы, 8 человек.  
Искомая вероятность:8/16=1/2=0,5  
Ответ: 0,5

**Пример 4.** Когда подбрасываем монету, какова вероятность выпадения решки?  
Исходов 2 – орел или решка. (считается, что монета никогда не падает на ребро) Благоприятный исход – решка, 1.  
Вероятность 1/2=0,5  
Ответ: 0,5.

**Пример 5.** А если подбрасываем монету два раза? Какова вероятность того, что оба раза выпадет орел?  
Главное определить, какие элементарные исходы будем рассматривать при подбрасывании двух монет. После подбрасывания двух монет может получиться один из следующих результатов:  
1)PP – оба раза выпала решка  
2)PO – первый раз решка, второй раз орел  
3)OP – первый раз орел, второй раз решка  
4)OO – оба раза выпал орел  
Других вариантов нет. Значит, элементарных исходов 4. Благоприятный из них только первый, 1.  
Вероятность:1/4=0,25  
Ответ: 0,25

**Пример 6.** Бросаем игральную кость. Какова вероятность, что выпадет четное число?

Всего исходов: 6, по числу граней.  
Благоприятных: 3 исхода. (2, 4, 6)  
Вероятность: 3/6=0,5

**Пример 7.** Бросаем две игральные кости. Какова вероятность, что в сумме выпадет 10? (округлить до сотых)

Для одного кубика 6 возможных исходов. Значит, для двух, по вышеупомянутому правилу, 6·6=36.  
Какие исходы будут благоприятными для того, чтоб в сумме выпало 10?  
10 надо разложить на сумму двух чисел от 1 до 6. Это можно сделать двумя способами: 10=6+4 и 10=5+5. Значит, для кубиков возможны варианты:  
(6 на первом и 4 на втором)  
(4 на первом и 6 на втором)  
(5 на первом и 5 на втором)  
Итого, 3 варианта. Искомая вероятность: 3/36=1/12=0,08  
Ответ: 0,08

***4.Теоремы сложения и умножения***

**Теорема сложения вероятностей НЕсовместных событий:** Р(А+В)=Р(А)+Р(В)

**Теорема сложения вероятностей совместных событий:**

Р(А+В)=Р(А)+Р(В)-Р(А+В)

**Терема умножения вероятностей НЕзависимых событий:** Р(АВ)=Р(А)\*Р(В)

**Терема умножения вероятностей зависимых событий:** Р(АВ)=Р(А)\*РА(В)=Р(В)\*РВ(А)

**Когда важно или одно или другое — варианты выбора складываются, когда и одно и другое — умножаются**. Оба правила позволяют найти, сколько есть вариантов на выбор или, например, сколько есть способов различного расположения предметов.

**Пример**. В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем 5 из них стандартные. Рабочий берет наудачу 3 детали. Найти вероятность того, что по крайней мере одна из них окажется стандартной.

**Решение:** А-событие состоящее в том, что вынута стандартная деталь. В- 1 стандартная, 2 нестандартные. С- две детали стандартные, 1 нестандартная, Д-все 3 стандартные. События несовместные (одновременно не может быть деталь и стандартной и бракованной). Значит Р(А)=Р(В)+Р(С)+Р(Д) =35/76+5/38+1/114=137/228

**Задача:** Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

**Решение:** Введем независимые события:  
А1 = (при аварии сработает первый сигнализатор);  
А2 = (при аварии сработает второй сигнализатор);  
по условию задачи P(A1)=0,95,P(A2)=0,9.

Введем событие Х= (при аварии сработает только один сигнализатор). Это событие произойдет, если при аварии сработает первый сигнализатор и не сработает второй, или если при аварии сработает второй сигнализатор и не сработает первый, то есть X=A1⋅A2¯+A1¯⋅A2.

Тогда вероятность события Х по [теоремам сложения и умножения вероятностей](https://www.matburo.ru/tvbook_sub.php?p=par14) равна

P(X)=P(A1)⋅P(A2¯)+P(A1¯)⋅P(A2)=0,95⋅0,1+0,05⋅0,9=0,14.

**Ответ:** 0,14.

**Задача 1.** Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе - 0,9, в третье - 0,8. Найти вероятность следующих событий:  
а) только одно отделение получит газеты вовремя;  
б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

Решение:

а)Х–событие состоящее в том, что только одно отделение получит газеты вовремя

А1-первое отделение;А2-второе отделение;А3-третье отделение:

P(X)=P(A1)⋅P(A2¯)⋅P(A3¯)+P(A1¯)⋅P(A2)⋅P(A3¯)+P(A1¯)⋅P(A2¯)⋅P(A3)

=0,95⋅0,1⋅0,2+0,05⋅0,9⋅0,2+0,05⋅0,1⋅0,8=0,032.

б)Найдем вероятность события Y=(хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием). Введем противоположное событие Y¯=(все отделения получат газеты вовремя). Вероятность этого события

P(Y¯)=P(A1⋅A2⋅A3)=P(A1)⋅P(A2)⋅P(A3)=0,95⋅0,9⋅0,8=0,684.

Тогда вероятность события Y:

P(Y)=1−P(Y¯¯)=1−0,684=0,316.

**Ответ:** 0,032; 0,316

**5.Условная вероятность**

***Условной вероятностью*** PA(B)=P(B|A) (два обозначения) называют вероятность события В, вычисленную в предположении, что событие А уже наступило.

Вероятность ***совместного появления двух зависимых событий*** равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго, вычисленную при условии, что первое событие произошло, т.е.

P(AB)=P(B)⋅P(A|B)=P(A)⋅P(B|A).

В частности, отсюда получаем формулы для условной вероятности:

P(A|B)=P(AB)/P(B),P(B|A)=P(AB)/P(A).

**Пример1 .** В урне находятся 3 белых шара и 2 черных. Найти вероятность вынуть белый шар при двух испытаниях.

**Решение.** Из урны вынимается один шар, а затем второй. Событие *В* – появление белого шара при первом испытании. Событие *А* – появление белого шара при втором испытании.

Очевидно, что вероятность события  *А*, если событие  *В*  произошло, будет Р(А!В)=2/4 (та как в урне останется меньше на 1 шар шаров вообще и меньше на один шар белых шаров)  
Вероятность события *А* при условии, что событие *В* не произошло, будет  
Р(А!В)=3/4 (уменьшится на 1 количество всех шаров, но количество белых будет прежним).

**Пример 2.** В трамвайном парке имеются 15 трамваев маршрута №1 и 10 трамваев маршрута № 2. Какова вероятность того, что вторым по счету на линию выйдет трамвай маршрута №1?

**Решение**. Пусть *А* - событие, состоящее в том, что на линию вышел трамвай маршрута №1, *В* - маршрута №2.

Рассмотрим все события, которые могут при этом быть (в условиях нашей задачи): АА, АВ, ВА,ВВ. Из них нас будут интересовать только первое и третье, когда вторым выйдет трамвай маршрута №1. Причем ИЛИ одно, ИЛИ другое.

Так как все эти события совместны, то: Р(АА)=Р(А)Р(А!А)=15/25\*14/24 (один трамвай уже ушёл первым и это был №1, значит стало меньше на 1 и вообще трамваев и №1 тоже))

Р(ВА)=Р(В)Р(А!В)=10/25\*15/24, (первым ушел трамвай № 2 и количество всех трамваев уменьшилось на 1, но количество трамваев №1 осталось прежним)значит вероятность будет равна сумме этих вероятностей Р=Р(АА)+Р(ВА)=0,6

***6.Комбинаторика. Факториал. Перестановки. Сочетания. Размещения.***

**Факториал натурального числа n** — это произведение всех натуральных чисел от до n. Порядок множителей значения не имеет. Такое произведение обозначается через n! Принято считать, что 0! =1.

**Перестановка** это число обозначается *Pn*, от французского permutation – перестановка.

**Перестановка n объектов/элементов** — это способ их последовательного расположения с учётом порядка. Например, abc, bca и cab — это разные перестановки трёх букв.  
  
Перестановку n объектов ещё называют **перестановкой длины** n. Количество всех таких перестановок обозначается как P. Вычисляется по формуле Рп=п!

**Пример.** На странице интернет-магазина одежды размещены три футболки. Если поменять их расположение на странице, получится новая перестановка. Сколькими способами можно расположить футболки на странице?   
**Решение.** Три футболки можно расположить на странице 6 способами: P₃ = 3! = 1 ∙ 2 ∙ 3. (123,132,213,231,312,321)  
  
**Пример.** Чтобы выполнить ежедневный квест, игроку нужно принести магу корзину с четырьмя кристаллами разного цвета. Первой необходимо найти корзину, а кристаллы можно сложить в неё в произвольном порядке. Как найти число способов выполнить задание?  
  
**Решение.** Для выполнения квеста нужно 5 предметов. Корзину всегда находят первой, поэтому её позиция зафиксирована. Порядок сбора 4 оставшихся предметов равен числу перестановок 4 элементов. Всего есть 4! = 24 способа выполнить задание.

## Размещение оно обозначается http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/86a31d56-bffb-77db-0483-95cb93c4a964/00145623000935335.gif, от французского arrangement – размещение Аmn =n!/(n-m)!

Когда порядок расстановки важен, говорят о **размещении**.  
  
**Размещение из n по k** — это упорядоченный набор из k различных элементов, взятых из некоторого множества с мощностью n, где k ≤ n. То есть некая перестановка k выбранных элементов из n.  
  
**Количество размещений из n по k** обозначают и вычисляют так:

В отличие от перестановки, у размещения два параметра: из скольких элементов выбирают (n) и сколько именно выбирают (k).  
Порядок выбора элементов важен, когда:  
● Выбирают несколько элементов для разных целей, разных дней, разных ролей.  
● В задачах на расположение, когда элементы различимы. Например, когда надо выбрать несколько человек из группы и разместить их на креслах в кинотеатре. Люди разные, поэтому имеет значение, кто где сядет.  
  
**Пример**. Недалеко от пользователя есть 9 ресторанов. Из них надо выбрать 4, которые будут отображаться на главном экране. Сколько есть способов выбрать рестораны?  
**Решение**. Порядок выбора важен, поэтому выбирать четыре ресторана с помощью формулы размещений. Это как раз и есть количество размещений из 9 по 4. А49 =9!/(9-4)!=5!\*6\*7\*8\*9/5!= 9 ∙ 8 ∙ 7 ∙ 6 = 3024  
  
**Пример**. Сколькими способами можно заполнить спортивный пьедестал из трёх мест, если есть 10 претендентов?  
**Решение**. Выбрать упорядоченную тройку можно 10 ∙ 9 ∙ 8 = 720 способами. По формуле для количества размещений это считается так:

10!/(10-3)!=720

**Сочетание**http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/86a31d56-bffb-77db-0483-95cb93c4a964/00145623000975336.gif от французского combinaison – сочетание.

Когда порядок выбора или расположения не важен, говорят о **сочетании**.  
  
**Сочетание из n по k** — это НЕупорядоченный набор из k различных элементов, взятых из некоторого множества с мощностью n, где k ≤ n. То есть набор, для которого порядок выбора не имеет значения.  
  
**Количество сочетаний из n по k** обозначают и вычисляют так:

Несколько частных значений для количества сочетаний:

Порядок выбора или расстановки не важен, когда:  
  
● Выбирают несколько элементов одновременно. В учебниках по математике самый частый пример — мешок с шариками, откуда вытаскивают несколько шариков разом.  
● Выбирают пару (тройку, группу) для взаимного или равноправного процесса. Например, двух человек для партии в шахматы, две команды для игры в хоккей, две точки для соединения отрезком, пять человек для хора.  
  
**Пример**. Из 9 актёров выбирают четырёх для массовки. Порядок выбранных людей не важен. Сколько есть способов выбрать актёров?  
**Решение**. Чтобы получить количество вариантов выбора 4 из 9 без учёта порядка, нужно 9!/4!(9-4)!=5!\*6\*7\*8\*9/1\*2\*3\*4\*5!=126

Это количество сочетаний из 9 по 4.  
**Пример**. В сувенирном магазине продаются 6 видов кружек. Сколько есть способов выбрать 4 разные кружки?  
**Решение**. Общее количество перестановок для 6 элементов нужно 6! разделить на (6 – 4)! \* 4!, так как не нужно учитывать ни перестановки «невыбираемых» кружек, ни порядок среди выбираемых.

**Пример:** группа туристов из 15 юношей и 5 девушек выбирает по жребию хозяйственную команду в составе 4 человек. Какова вероятность того, что в составе будет 2 юноши и 2 девушки?

**Решение:** выбор будет сделан по жребию-значит все исходы равновероятны и они несовместны. N=С204 . количество способов выбрать юношей С215, способов выбрать девушек С25 . Событие А-выбрано 2 юноши и 2 девушки. Тогда вероятность найдем так: Р(А)= С215\* С25  =0,217.

С204

**Пример:** на книжной полке произвольно расставлены книги 4 по теории вероятностей и 3 по теории множеств. Какова вероятность того, что книги по одному и тому же предмету окажутся рядом?

**Решение:** событие А- книги по одному и тому же предмету окажутся рядом**.** Всего книг 7, значит вариантов их перестановок 7!, чтобы книги по одному предмету были рядом надо найти варианты перестановок 3! И умножить на 4!, но у нас два таких варианта: сначала могут стоять одни книги-по одному предмету, а потом поменяться местами. Тогда получим: Р(А)=3!\*4!\*2 = 0,057

7!

***7.Формула полной вероятности. Формула Байеса***

**Формула полной вероятности**  является следствием теорем сложения и умножения вероятностей. Когда требуется определить вероятность некоторого события А, которое может произойти с одним из событий Н1 , Н2 , Н3 , ….Нп . эти события называются гипотезами, они образуют полную группу несовместных событий. Формула полной вероятности требуется, когда необходимо узнать вероятность совершения некоторого события, если его совершение зависит от нескольких условий. Например, можно узнать вероятность принятия законопроекта, зная, с какой вероятностью его примет каждая партия. Ещё формула применяется в задачах о нахождении среднего качества продукции, выпускаемой цехом. Р(А)=∑Р(Нi)Р(А/Нi)

|  |
| --- |
| **Задача 1:** |
|  |
| Имеются 3 одинаковые урны с шарами. В первой из них находится 3 белых и 4 черных шара, во второй —2 белых и 5 чёрных, а в третьей — 10 чёрных шаров. Из случайно выбранной урны наудачу вынут шар. С какой вероятностью он окажется белым? | | |

**Решение.** Будем считать события B1,B2,B3 выбором урны с соответствующим номером, а событие A — выбором белого шара. По условию задачи все события выбора урны равновероятны, значит:

P(B1) = P(B2) = P(B3) = 1/3

Теперь найдём вероятность события A при выборе каждой урны:

P(A∣B1)=3/7, P(A∣B2)=2/7, P(A∣B3)=0.

В результате получаем P(A) = 1/3⋅3/7+1/3⋅2/7+1/3⋅0 ≈ 0.238

ЗАДАЧА 2. Из 1000 ламп 380 принадлежат к 1 партии, 270 – ко второй партии, остальные к третьей. В первой партии 4% брака, во второй - 3%, в третьей – 6%. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа – бракованная.

РЕШЕНИЕ. Введем полную группу независимых гипотез: Hi = (Лампа принадлежат i -ой партии), i =1,2,3 . Найдем вероятности гипотез по классическому определению вероятностей. Всего ламп 1000, из них 1-ой партии принадлежат 380, то есть Р(Н1 ) = 0,380 , P (H2) = 0,270 , Р(Н3)= 0,350 (1000-270-380) . Введем событие A = (Лампа бракованная). По условию даны вероятности: P (A| H1)= 0,04 = , P (A| H2)= 0,03 , P (A| H3)= 0,06 . Вероятность события A найдем по формуле полной вероятности Р(А)= 0,38\* 0,04+ 0, 27 \*0,03+ 0,35 0,06= 0,0443.

По **формуле Байеса** можно более точно пересчитать вероятность, беря в расчет как ранее известную информацию, так и данные новых наблюдений. Формула Байеса позволяет **«переставить причину и следствие»**: по известному факту события вычислить вероятность того, что оно было вызвано данной причиной. События, отражающие действие «причин», в данном случае называют гипотезами, так как они — предполагаемые события, повлекшие данное. **Формула Байеса** (или теорема Байеса)— соотношение различных предполагаемых вероятностей различных событий, которое дает вероятность, что какое-то событие A является результатом X ряда независимых друг от друга событий B1,B2…Bn, который, возможно, привел к A.

P(Bi|A)=P(A|Bi)P(Bi)

∑P(A|Bj)P(Bj)

где

P(A) — вероятность события A,

P(A|B) — вероятность события A при наступлении события B,

P(B|A)— вероятность наступления события B при истинности события A,

P(B) — вероятность наступления события B.

ЗАДАНИЕ. Из 30 стрелков 12 попадает в цель с вероятностью 0,6, 8 - с вероятностью 0,5 и 10 – с вероятностью 0,7. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, поразив цель. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

РЕШЕНИЕ. Введем полную группу гипотез: H1 = (Стрелок принадлежал первой группе), H 2 = (Стрелок принадлежал второй группе), H3 = (Стрелок принадлежал третьей группе). По классическому определению вероятности: Р(H1)= 12/30=0, 4 ; P(H 2 )= 8/30= 4/15; P(H3)= 10/30=1/3. Введем событие A = (Стрелок попал в мишень). Выпишем условные вероятности: P (A | H1) =0,6; P (А | H2 )= 0,5 ; P (А | H3)= 0,7 .

Найдем сначала вероятность события A по формуле полной вероятности: Р ( А)= 0,4\* 0,6+ 4/15\*0,5+1/3\* 0,7 ≈ 0,607. Теперь найдем вероятности того, что стрелок принадлежал i -ой группе, если он попал в цель, по формуле Байеса.

P (H1 |А)=Р(Н1 )Р(A | H1)=0,395

Р(А)

P (H2 |А)=0,22 ; P (H3 |А)=0,384

Таким образом, вероятнее всего стрелок принадлежал первой группе.

***8.Испытания Бернулли.***

**Формула Бернулли** — формула в [теории вероятностей](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%B2%D0%B5%D1%80%D0%BE%D1%8F%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9), позволяющая находить вероятность появления события  определённое количество раз при любом числе независимых испытаний. Формула Бернулли позволяет избавиться от большого числа вычислений — сложения и умножения вероятностей — при достаточно большом количестве испытаний. Названа в честь выдающегося швейцарского математика  [Якоба Бернулли](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AF%D0%BA%D0%BE%D0%B1_%D0%91%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%83%D0%BB%D0%BB%D0%B8), который вывел эту формулу.

**Теорема.** Если вероятность �р наступления некоторого события в каждом испытании постоянна, то вероятность ���Рkn того, что данное событие наступит ровно � раз k в n � независимых испытаниях, равна:

1. Рkn =Ckn pk gn-k , где g=1-p – формула Бернулли
2. Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна Рn(m≥1)=1-gn , где g=1-p
3. Вероятность того, что событие А при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли,наступит не менее m1 раз и не более m2 раз вычисляется по формуле

Pn(m2 ≤m≤ m2)= ∑m1m2Pn(m)

1. Наивероятнейшее значение m0числа наступлений события А при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли,вычисляется по формуле np-g≤m0≤np+ p или

np-(1-p)≤m0≤np+p

Указания: при решении задач данного вида необходимо установить, что рассматриваемый эксперимент удовлетворяет схеме Бернулли, то есть необходимо проверить, что:

1. Проводимые испытания независимы;
2. Каждое испытание имеет только два исхода;
3. Вероятность появления события в каждом испытании постоянна и =***p.***

После этого вводим соответствующие обозначения события, вероятность наступления которого надо вычислить, и выбрать нужную формулу.

**Примеры:**

1. Вероятность выигрыша по одному билету денежно-вещевой лотереи равна 0,2. Какова вероятность того, что из 6 приобретенных билетов два билета окажутся выигрышными?

***Решение:***эксперимент состоит в том, что последовательно проверяются 6 билетов, значит проводится 6 повторных независимых испытаний испытаний. Каждое испытание имеет два исхода. Вероятность выигрыша в каждом испытании постоянна. Схема Бернулли выполняется. Пусть событие состоит в том, что 2 билета выигрышные. g= 1- p. Тогда по формуле Бернулли: P6 (m=2)=C26\*0,22\*0,84 =0,246

1. Прибор состоит из шести элементов, включенных в цепь рпараллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время t равна 0,6. Для безотказной работы прибора достаточно, что бы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время t прибор будет работать безотказно?

***Решение:***

Эксперимент заключается в том, что проведено шесть повторных независимых испытаний с двумя исходами. Вероятность отказа каждого элемента равна g=1-0,6=0,4. Следовательно схема Бернулли выполняется. Пусть событие, m≥1 означает, что хотя бы один элемент прибора исправен. Используем формулу (2):

P6(m≥1)=1-0,46=0, 9959

1. Магазин получил 50 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,05. Найдите наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии.

***Решение:***

Проводится 50 повторных независимых испытаний с двумя исходами в каждом. Вероятность появления нестандартной детали в каждом испытании постоянна. Схема Бернулли выполняется. По формуле (4) получаем, g=1-p=1-0,05=0,95:

50\*0,05-0,95≤m0≤50\*0,05+0,05, получим 1, 55≤ m0≤2,55.

Вывод: так как число деталей может быть только целым числом, значит наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии равно 2.

***9.Математическая статистика. Выборка. Числовые характеристики и их смысл.***

В современном понимании статистика-это регистрация, описание и анализ экспериментальных данных, получаемых в результате наблюдения массовых случайных явлений.

Математическая статистика – наука, занимающаяся общими вопросами, связанными со сбором и классификацией числовых данных и сведений, наука о математических методах, позволяющих по статистическим данным сформулировать выводы о свойствах изучаемого массового явления. На практике редко доступна полная информация о модели изучаемого явления, описываемого в терминах некоторой случайной величины X. Чаще о законе распределения X имеется лишь частичная информация либо никакой априорной информации о распределении X вообще нет. В этом случае возникают задачи восстановления параметров или вида неизвестного распределения FX или определения его свойств.

Задачи математической статистики являются, в некотором смысле, обратными к задачам теории вероятностей. Если теория вероятностей позволяет при заданной вероятностной модели вычислить вероятности тех или иных случайных событий, то математическая статистика по результатам проводимых наблюдений (по исходам эксперимента) уточняет структуру вероятностной модели изучаемого явления.

Математическая статистика решает следующие задачи:

1) систематизация полученного статистического материала (этап описания массового явления);

2) выявление свойств и закономерностей изучаемого явления (этап анализа и прогноза).

Центральным понятием математической статистики является выборка- это часть объектов выбранных из генеральной совокупности. Количество их будет – n. При этом число n называют объёмом случайной выборки, а случайные величины X1,…,Xn – элементами случайной выборки. Выборка должна отражать полностью генеральную совокупность-быть репрезентативной-представительной. Это обеспечивается путем случайности отбора и увеличением объема выборки.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 0 | 1 | 2 | Перечень значений (варианты: могут быть дискретными и интервальными) |
| ni | 5 | 2 | 3 | Частота встречаемости(частота) |
| wi | 0,5 | 0,2 | 0,3 | Относительная частота ni/n |

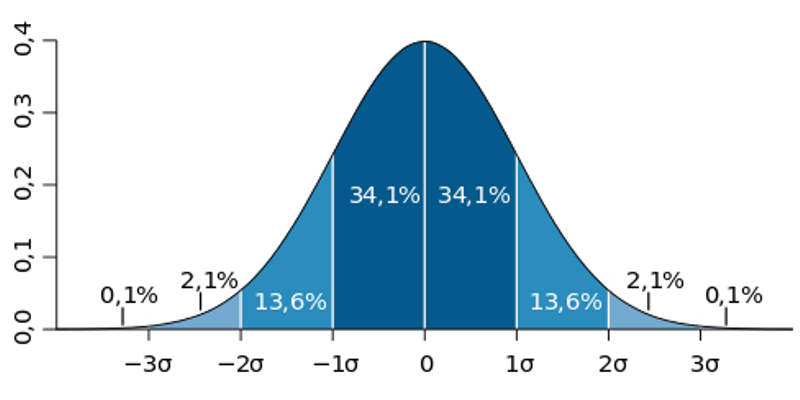
Генеральной совокупностью называют совокупность всех объектов, над которыми производят наблюдение. Выборочной совокупностью (выборкой) называют часть отобранных из генеральной совокупности объектов. Объёмом совокупности называют количество объектов в ней. По выборке судят о генеральной совокупности, значит любое вывсказывание о генеральной совокупности является гипотезой.

**Математи́ческое ожида́ние** — понятие в [теории вероятностей](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%B2%D0%B5%D1%80%D0%BE%D1%8F%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9), означающее [среднее](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%BD%D0%B5%D0%B5_%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) (взвешенное по вероятностям возможных значений) значение [случайной величины](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BB%D1%83%D1%87%D0%B0%D0%B9%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B2%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%BD%D0%B0). М=∑nipi/n, где n- объем выборки.

**Диспе́рсия случа́йной величины́** — мера разброса значений [случайной величины](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BB%D1%83%D1%87%D0%B0%D0%B9%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B2%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%BD%D0%B0) относительно её [математического ожидания](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BE%D0%B6%D0%B8%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5). Обозначается �[�] в русской литературе D(Х). и находят по формуле D(Х)=∑pi (ni-X)2 /n.

**Среднеквадрати́ческое отклонение** (*среднеквадрати́чное отклонение*, *стандартное отклонение*) — наиболее распространённый показатель рассеивания значений [случайной величины](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BB%D1%83%D1%87%D0%B0%D0%B9%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B2%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%BD%D0%B0) относительно её [математического ожидания](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BE%D0%B6%D0%B8%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5) (аналога [среднего арифметического](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%BD%D0%B5%D0%B5_%D0%B0%D1%80%D0%B8%D1%84%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5) с бесконечным числом исходов). Обычно определяется как [квадратный корень](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B2%D0%B0%D0%B4%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BA%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%8C) из [дисперсии случайной величины](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%81%D0%BF%D0%B5%D1%80%D1%81%D0%B8%D1%8F_%D1%81%D0%BB%D1%83%D1%87%D0%B0%D0%B9%D0%BD%D0%BE%D0%B9_%D0%B2%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%BD%D1%8B): �=�[�]δ=√Д. Квадратный корень из дисперсии, равный �б, называется [среднеквадратическим отклонением](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%BD%D0%B5%D0%BA%D0%B2%D0%B0%D0%B4%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BE%D1%82%D0%BA%D0%BB%D0%BE%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5), стандартным отклонением или стандартным разбросом. Стандартное отклонение измеряется в тех же [единицах](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B8%D1%86%D1%8B_%D0%B8%D0%B7%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F), что и сама случайная величина, а дисперсия измеряется в квадратах этой единицы измерения.

*Правило трёх сигм* (3�3 б) гласит: вероятность того, что любая случайная величина отклонится от своего среднего значения менее чем на 3�3б: Практически все значения [нормально распределённой](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%80%D0%B0%D1%81%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) случайной величины лежат в интервале (�−3�;�+3�)(М-3б;М+3б)



## Интерпретация

Большее значение среднеквадратического отклонения показывает больший разброс значений в представленном множестве со средней величиной множества; меньшее значение, соответственно, показывает, что значения в множестве сгруппированы вокруг среднего значения.

Например, для всех трёх числовых множеств: {0, 0, 14, 14}, {0, 6, 8, 14} и {6, 6, 8, 8} средние значения равны 7, а среднеквадратические отклонения, соответственно, равны 7, 5 и 1. У последнего множества среднеквадратическое отклонение маленькое, так как значения в множестве сгруппированы вокруг среднего значения; у первого множества самое большое значение среднеквадратического отклонения — значения внутри множества сильно расходятся со средним значением.

В общем смысле среднеквадратическое отклонение можно считать мерой неопределённости. К примеру, в физике среднеквадратическое отклонение используется для определения [погрешности](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B5%D1%88%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C) серии последовательных измерений какой-либо величины. Это значение очень важно для определения правдоподобности изучаемого явления в сравнении с предсказанным теорией значением: если среднее значение измерений сильно отличается от предсказанных теорией значений (большое значение среднеквадратического отклонения), то полученные значения или метод их получения следует перепроверить.

В статистике дисперсией называют величину, которая характеризует меру разброса значений случайной величины относительно ее математического ожидания. В русскоязычной литературе дисперсия обозначается D[X]. Дисперсией случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания. Формула для вычисления наиболее простая Д(Х)=М(Х2 ) – (М(Х))2 .

Наглядное представление статистических данных: полигон и гистограмма.

**Гистограмма представляет собой** ступенчатую фигуру в виде прямоугольников. Длина каждого прямоугольника представляет собой равный одинаковый частотный интервал и вычисляется по формуле: **xi-xi-1.**

Пример

В водоёме проведены измерения температуры воды в течение 20 дней.

Статистика отчета измерений:

**11, 15, 18, 14, 12, 13, 11, 14, 18, 19, 18, 14, 15, 16, 14, 18, 21, 17, 13, 16**

  Построить гистограмму относительных, абсолютных и накопленных частот выборки, вычислить эмпирическую плотность распределения частот.

  Решение.

  По условию задачи объем выборки равен 20.

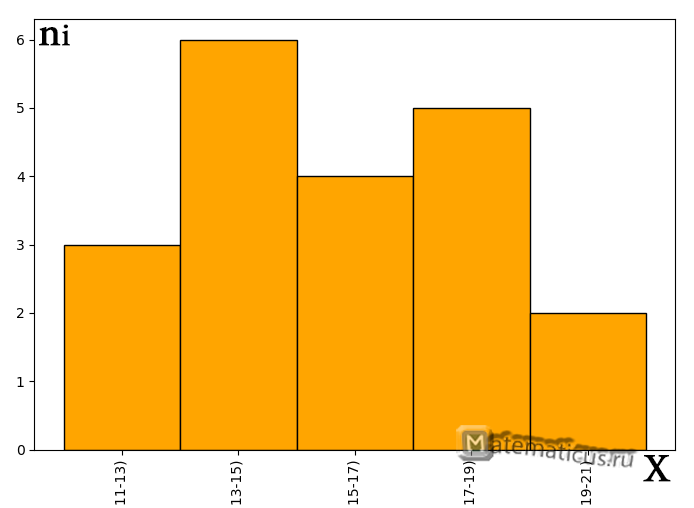
Отсортируем и упорядочим вариационный ряд, начиная от самого минимального значения, получим:

**11, 11, 12, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 16, 16, 17, 18, 18, 18, 18, 19, 21**

Получаем таблицу интервалов

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Номер интервала | **Абсолютная частота, ni** | **Частотный интервал** |
| 1. | **3** | **[11;13)** |
| 2. | **6** | **[13;15)** |
| 3. | **4** | **[15;17)** |
| 4. | **5** | **[17;19)** |
| 5. | **2** | **[19;21)** |

График гистограммы абсолютных частот

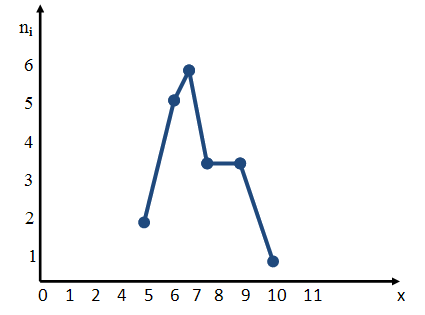


**Полигон** это тоже самое, что и [многоугольник распределения вероятностей](https://www.matematicus.ru/teoriya-veroyatnosti/mnogougolnik-raspredeleniya-diskretnoj-sluchajnoj-velichiny) или частот и строится для дискретной случайной величины.

**Полигон в статистике** — это график (или ломанная линия), отрезки которой соединяют точки с координатами **хi, wi** в прямоугольной системе координат между собой и наглядно показывает распределение частот как для количественных, так и  порядковых значений переменных.

Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты **хi**, а на оси ординат — соответствующие им частоты **ni**  и соединяют точки.

 Пример графика полигона частот **хi, ni**



Использованная литература:

1. Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике: учебное пособие для тезникумов.-М.:Высшая школа, 1979.-448с.
2. Н.Я. Виленкин, В.Г. Потапов. Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистики. –М.: Просвещение, 1979. -112 с.
3. Н.Я Виленкин, Р.С. Гутер, С.И. Шварцбург, Б.В. Овчинский В.Г. Ашкинузе. Алгебра. Учебное пособие для IX-X классов средних школ с математической специализацией. –М.: Провсвещение, 1972.-304.
4. В.Е. Гмурманю Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для студентов вузов. –М.: Высшая школа, 1979.-400 с.Б.Т. Кузнецов. Математика. Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности экономики и управления. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.-719 с.
5. Д.К. Фаддеев, М.С. Никулин, И.Ф. Соколовский. Элементы высшей математики для школьников. –М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы. 1987. -336 с.