*«Особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека, как располагать своими средствами для достижения по возможности большей выгоды»*

*(П.Л. Чебышев)*

Одной из важных потребностей современной школы является воспитание делового человека, финансово грамотного. Современность настоятельно требует, чтобы выпускник имел развитое экономическое мышление и был готов к жизни в условиях рыночных отношений.

В сегодняшние дни потребительские кредиты, кредитные карты, ипотека, вклады и другие финансовые услуги очень распространены и играют значимую роль в жизни каждого человека.

Эффективному постижению начал экономики помогает решение задач, в содержании которых идет речь о процентах. Сами проценты не дают экономического развития, но их знание помогает в развитии практических способностей, а также умения решать экономические задачи.

Текстовая задача с экономическим содержанием – относительно новый вид заданий, появившихся в КИМ ЕГЭ профильного уровня.

Решение таких задач связано со знанием некоторых математических моделей из области экономики, умением переводить сформулированные в виде текста условия в математическую модель (уравнения, неравенства и пр.) и пониманием того, как решения полученных моделей соотносятся с тем, что написано в условии задачи.

Далеко не все школьники приступают к решению задач с экономическим содержанием, и еще меньшее число – выполняют решение верно.

Причин этому может быть несколько:

* таких задач нет в школьных учебниках;
* психологический барьер (текстовые задачи очень сложны для большинства школьников);
* неумение составлять и (или) неверное составление математической модели (непонимание взаимосвязи величин);
* вычислительные (арифметические) ошибки (вычисления в таких задачах зачастую громоздкие);
* ограниченное время на экзамене.

Анализ решения экономических задач, собственный опыт решения этих задач показывают, что для успешного выполнения подобных задач учащимся необходимо знать и понимать:

* понятие процента;
* связь между процентом и дробью;
* виды уравнений, неравенств и пр.;
* правила действий с числами;
* арифметическую и геометрическую прогрессии.

 а также владеть:

* вычислительными навыками (устными и письменными);
* переводом процентов в дробь и обратно;
* решением простейших задач на проценты;
* умением находить часть от числа;
* составлением математических моделей;
* решением математических моделей (уравнений, неравенств и пр.);
* умением использовать формулы арифметической и геометрической прогрессий.

Решение экономических задач в рамках элективного курса в 11 классе я начинаю со следующей задачи:

Вкладчик внёс некоторую сумму в сбербанк под определённый процент годовых. Через год он взял половину получившейся суммы и переложил её в коммерческий банк, процент годовых которого в 32 раза выше, чем в Сбербанке. Ещё через год сумма вкладчика в коммерческом банке превысила вложенную туда первоначальную сумму на 4%. Каков процент годовых в Сбербанке?

Сначала детям даётся время для осмысления, самостоятельного решения. Затем организуется обсуждение, в ходе которого школьники «проживают» задачную ситуацию и предлагают нарисовать схему движения денег и т.п., после чего "переводят" задачу на математический язык. Особое внимание при этом рекомендуется уделить осмыслению выражений , , , где *p* – процент годовых, *x –* сумма вклада, ввиду того, что полученные комбинации не случайны. Ниже приводится решение задачи:

1 этап – перевод "движения денег" на математический язык:

|  |  |
| --- | --- |
| СБЕРБАНК | КОММЕРЧЕСКИЙ БАНК |
| *x* рублей *–* внесено в СБ;*p* *–* процент годовых на вклад в СБ;через год:  руб.;взято через год: руб. | руб. – внесено в КБ;32*p* – процент годовых на вклад в КБ;через год:  |

*"Ещё через год сумма вкладчика в коммерческом банке превысила вложенную туда первоначальную сумму на 4%"*, т.е. стало 104% денег по отношению к оставшимся деньгам в СБ – это позволяет составить уравнение:

, так как ≠0, тогда 

*p* = 0,125.

*Ответ: 0,125%*.

Ученики нередко предлагают и такое решение: в коммерческом банке сумма вкладчика выросла на 4% за год – это означает, что процент годовых в этом банке равен четырём. Так же известно, что в Сбербанке процент годовых ниже в 32 раза, чем в коммерческом. Значит, 4 : 32 = 1 : 8 = 0,125%.

Но для меня, как для учителя, первое решение в начале обучения решению экономических задач очень важное, так как здесь присутствуют ключевые моменты, характерные для общего вида рассматриваемых задач с экономическим содержанием:

- наличие значимых выражений: , , ;

- перевод процентов в дробь;

- нахождение части от числа;

- решение уравнения с двумя переменными.

После этого школьникам рекомендуется предложить следующие задачи, которые, на мой взгляд, являются базовыми, позволяющими рассмотреть основные приемы решения (ниже предложен перечень таких задач и их решения). В этих задачах требуется найти одну из основных величин: сумму кредита, процентную ставку, платеж, срок кредитования. Кроме этого, в первых двух задачах необходимо вывести формулы, которые будут нужны при решении экономических задач. Заметим, что использование этих формул без вывода на экзамене не позволяет получить высший балл. Ввиду этого, важно уделить внимание выводу соответствующих формул, который работает на понимание учащимися закономерности.

№1. 31 декабря 2014 года Максим взял в банке некоторую сумму денег в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Михаил переводит в банк 2928200 рублей. *Какую сумму взял* Михаил в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами, то есть за 4 года?

**Решение:**

**А руб. – кредит;**

***х*=**2928200 **руб.** – ежегодный платеж;

р = 10% – годовая процентная ставка;

**n = 4 г – срок кредитования.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Дата** | **Остаток** |
| **12.14** | **А (кредит)** |
| **12.15** | **1,1А–х** |
| **12.16** | **1,1(1,1А–х) –х=1,1²А–1,1х–х** |
| **12.17** | **1,1(1,1²А–1,1х–х) –х=1,1³А–1,1²х–1,1х–х** |
| **12.18** | **1,1(1,1³А–1,1²х–1,1х–х) –х=1,1⁴А–1,1³х–1,1²х–1,1х–х** |

Так как кредит погашен, то остаток на последний год равен 0. Тогда:

**1,1⁴А–1,1³*х*–1,1²*х*–1,1*х*–*х* = 0**

**1,1⁴А =1,1³*х*+1,1²*х*+1,1*х*+*х***

 **1,1⁴А =** $х∙\frac{1,1^{4}-1}{1,1-1}$ **(\*)**

**1,4641А =** 2928200∙0,4641∙10

А= 9282000. *Ответ: 9282000 руб.*

**При решении этой задачи целесообразно показать, как и на каком этапе можно использовать формулу суммы геометрической прогрессии (для этого можно рекомендовать детям не приводить подобные слагаемые в выражениях 1,1²А–1,1х–х и т. д.). Иногда ученикам предлагаю решать такие задачи в общем виде до получения выражения (\*), чтобы не писать постоянно большие числа.**

**Далее с учащимися выводится формула** $(1+\frac{p}{100})^{n}∙A=x∙\frac{(1+\frac{p}{100})^{n}-1}{\left(1+\frac{p}{100}\right)-1}$ **, описывающая решение этой и других задач, в которых заложена схема действий: взяли кредит → начислили процент → выплачивают *одинаковыми* платежами. Вывод этой формулы просматривается в равенстве (\*).**

№2. 31 декабря 2014 года Иван взял в банке 1000000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая. 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Иван переводит в банк очередной транш. Иван выплатил кредит за два транша, то есть за два года. В первый раз Иван перевел в банк 660000 рублей, во второй раз – 484000 рублей. *Под какой процент* банк выдал кредит Ивану?

Решение:

**А = 100000 руб. – кредит;**

**n = 2 г – срок кредитования;**

**x1 = 660000 руб. – первый платеж;**

**x2 = 484000 руб. – второй платеж**

**p – годовая** процентная ставка.

|  |  |
| --- | --- |
| **Дата** | **Остаток** |
| **12.2014** | **А (кредит)** |
| **12.2015** | **A∙**$(1+\frac{p}{100})$ **– х1** |
| **12.2016** | **(**$A∙\left(1+\frac{p}{100}\right)-x\_{1}$**)(1+**$\frac{p}{100}$**) – x2** |

**Так как кредит погашен, то остаток на последний год равен 0. Тогда,**

**(**$A∙\left(1+\frac{p}{100}\right)-x\_{1}$**)(1+**$\frac{p}{100}$**) – x2 =0**

$A∙(1+\frac{p}{100})^{2}-x\_{1}\left(1+\frac{p}{100}\right)-x\_{2}=0$ **(\*\*)**

**Откуда находим *p*=10. *Ответ: 10%.***

**Здесь необходимо вывести формулу, описывающую решение этой и других задач, в которых заложена схема действий: взяли кредит → начислили процент → выплачивают *разными* платежами.**

$$A∙(1+\frac{p}{100})^{n}=x\_{1 }\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}+x\_{2}\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2}+…+x\_{n} (1+\frac{p}{100})^{0}$$

 **Вывод легко просматривается в равенстве (\*\*).**

№3. 31 декабря 2014 года Пётр взял в банке 8599000 рублей в кредит под 14% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14%), затем Пётр переводит в банк некоторую сумму. *Какой должна быть сумма транша*, чтобы Пётр выплатил долг тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

Решение:

**Рассуждения в этой задаче аналогичны рассуждениям, приведёнными в задаче №1.**

**Составив уравнение 1,14³А=** $х∙\frac{1,14^{3}-1}{1,14-1}$ **, находится *х*: *х* = 3703860.**

***Ответ: 3703860 руб.***

 №4. Андрей хочет взять в банке кредит 1,5 миллиона рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными платежами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка - 10% годовых. На *какое минимальное количество лет* может Андрей взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 тысяч рублей?

**Решение:**

**А = 1500000 руб. – кредит;**

р = 10% **–**  процентная ставка;

*x*n ≤ 350000 **–** ежегодные выплаты (*x*n руб.– выплаты);

n **–** срок кредитования (г).

**Для того, чтобы кредит был взят на минимальное количество лет, выплаты должны быть максимальными.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Дата** | **Начисление процентов, руб.** | **Выплаты, руб.** | **Остаток, руб.** |
| **1 год** | **1,1∙1500000=1650000** | **350000** | **1300000** |
| **2 год** | **1,1∙1300000=1430000** | **350000** | **1080000** |
| **3 год** | **1,1∙1080000=1188000** | **350000** | **838000** |
| **4 год** | **1,1∙838000=921800** | **350000** | **571800** |
| **5 год** | **1,1∙571800=628980** | **350000** | **278980** |
| **6 год** | **1,1∙278980=306878** | **306878** < **350000** | **0** |

На 6-й год станет меньше 350 000 руб., то есть последняя выплата все покроет. Значит, кредит будет погашен за 6 лет. *Ответ: 6 лет.*

Ниже представлен перечень и решения задач с экономическим содержанием, которые целесообразно использовать для организации самостоятельной индивидуальной работы учащихся.

**Задачи**

**№5.** В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года
в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

* каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
* с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
* в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Месяц и год | Июль 2016 | Июль 2017 | Июль 2018 | Июль 2019 |
| Долг(в млн рублей) | S | 0,8S | 0,5S | 0 |

Найдите наибольшее значение S, при котором общая сумма выплат будет меньше 4 млн рублей.

Решение:

S **руб. –** кредит (S **–** целое);

***x*1, *x*2,*x*3 < 4 млн руб. – выплаты;**

р = 15% – процентная ставка.

Решение:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Дата** | **Начисление процентов** | **Выплаты** | **Остаток** |
| **1 год** | **1,15 ∙** S | ***x*1** | 0,8S |
| **2 год** | **1,15 ∙** 0,8S=0,92S | ***x*2** | 0,5S |
| **3 год** | **1,15 ∙** 0,5S=0,575S | ***x*3** | **0** |

**Откуда *x*1 = 1,15** S **–** 0,8S=0,35S,  ***x*2 = 0,42**S , ***x*3 =0,575**S. Так как каждая выплата менее **4 млн. рублей, то**

$\left\{\begin{array}{c}0,35S<4\\0,42S<4\\0,575S<4\end{array}\right.$ **;** $\left\{\begin{array}{c}S<11\frac{3}{7}\\S<9\frac{11}{21}\\S<6\frac{22}{23}\end{array}\right.$ **;** $S<6\frac{22}{23}$**.**

**Так как** S **–** целое и требуется найти наибольшее значение, то S=6. ***Ответ: 6 млн руб.***

**№6.** Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20 % по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 7 млн рублей.

**Решение:**

**А руб. – кредит;**

р = 20% **–** процентная ставка;

*х* **руб. –** выплата в конце 4-го и 5-го годов.

**Так как первые три года выплачивали только проценты по кредиту, то эти выплаты составляли 0,2А в год. За три года – 0,6А. Тогда после выплаты в конце 4-го года останется (1,2А – *х*); в конце 5-го года – (1,2∙(1,2 – *х*) – *х*). Так как на конец 5-го года кредит будет полностью погашен, то 1,2∙(1,2 – *х*) – *х*=0. Откуда х =**$ \frac{ 36}{55}А$**. Тогда общие выплаты за 5 лет составят 0,6А+2∙**$\frac{ 36}{55}А$**. Учитывая, что общая сумма выплат меньше 7, имеем: 0,6А+2∙**$\frac{ 36}{55}А<7$**. Решив неравенство, получим А=3. *Ответ: 3 млн руб.***

**№7.** В июле планируется взять кредит в банке на сумму 7 млн рублей на срок 10 лет. Условия возврата таковы:

* каждый январь долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;
* с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем.

Найдите наименьшую возможную ставку r, если известно, что последний платёж будет не менее 0,819 млн рублей.

**Решение:**

**Так как долг уменьшается на одну и ту же сумму в течение 10 лет, то уменьшаться он будет на 7 : 10=0,7 млн рублей в год. На 10-й год остаток долга составит 0,7 млн рублей. Тогда** $0,7(1+\frac{r}{100})\geq 0,819$**. Решая неравенство, получим r =17. *Ответ: 17%.***

**№8 (задача ЕГЭ 2018 года).** 15 января планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

* 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
* с 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
* на 15-е число каждого с 1-го по 30-й месяц долг должен уменьшаться на 20 тыс. руб.;
* за тридцать первый месяц долг должен быть погашен полностью.

 Сколько тысяч рублей составляет долг на 15-е число 30-го месяца, если банку всего было выплачено 1348 тыс. рублей?

**Решение: (*автор решения – Кабанов Иван, ученик 11 А класса МБОУ "Гимназия №131"; экспертами ЕГЭ решение было оценено высшим баллом*)**







**Список литературы и других источников по теме.**

1. Подготовка к ЕГЭ: задача с с экономическим содержанием / **Ханин Д.И., Коннова Е.Г., Резникова Н.М., Фридман Е.М. –** Ростов -на- Дону: Легион, 2015.
2. **Сайт "Решу ЕГЭ". – Режим доступа:** <https://ege.sdamgia.ru>

**Шестаков, С.А.** ЕГЭ 2018. Математика. Задачи с экономическим содержанием **– М. :** МЦНМО**, 2018.**