Методика решения задач с использованием цепных дробей

Сайфуллина Марина Николаевна

учитель математики первой квалификационной категории

МБОУ «Средняя общеобразовательная школа №167 с углубленным изучением отдельных предметов» Советского района г. Казани

Целью работы является рассмотреть принципы работы с цепными дробями.

Для достижения поставленной цели необходимо выполнить следующие **задачи**:

1. Изучить историю возникновения цепных дробей.
2. Записывать действительные числа в виде цепных дробей
3. Рассмотреть решение уравнений с помощью цепных дробей.
4. Освоить алгоритмы нахождения подходящих дробей для действительных чисел.

Предмет исследования: Цепные дроби

Методы исследования:

1. Решение большого числа цепных дробей.
2. Поиск рационального метода решения для конкретной дроби.

Теоретическая значимость и прикладная ценность результатов:

1.Узнать полезную информацию для себя, расширить кругозор знаний.

2.Результаты работы могут быть использованы на уроках математики, элективных и факультативных занятиях.

Гипотеза: методика решения уравнений в целых числах олимпиадного уровня.

Актуальность темы заключается в применении при решении разнообразных задачах (задачи повышенной трудности и олимпиадного характера). Действительные числа однозначно отображаются цепными дробями. Основное значение такого изображения заключается в том, что, зная цепную дробь, изображающую действительное число, можно определить это число с достаточной точностью.

Определение понятие «цепной дроби» и её история возникновения

Непрерывная дробь (или **цепная дробь**) - это конечное или бесконечное математическое выражение вида $a_0; a_1; a_2; a_3\ldots]=a_0 + \cfrac{1}{a1+\cfrac{1}{a2+\cfrac{1}{a3+\cdots}}}$, где a_0 есть целое число и все остальные a_n натуральные числа (то есть, положительные целые).

При этом числа a_0, a_1, a_2, a_3 называются **неполными частными** или **элементами** цепной дроби. Число может быть представлено конечной цепной дробью тогда и только тогда, когда оно рационально. Иррациональные числа представляются в виде бесконечной цепной дроби.

Любое вещественное число можно представить в виде цепной дроби (конечной или бесконечной). Число представляется конечной цепной дробью тогда и только тогда, когда оно рационально.

Главное назначение непрерывных дробей состоит в том, что они позволяют находить хорошие приближения вещественных чисел в виде обычных дробей. Непрерывные дроби широко используются в теории чисел и вычислительной математике, а их обобщения оказались чрезвычайно полезны в математическом анализе и других разделах математики. Используются также в физике, небесной механике, технике и других прикладных сферах деятельности.

По некоторым сведениям цепные дроби применялись уже математиками Древней Греции. Например, алгоритм Евклида (III в. до н. э.) тесно связан с цепными дробями. Возможно, что при нахождении приближения к числу $\sqrt{3}$ Архимед (ок. 287-212 до н. э.) пользовался методом, близкому к разложению $\sqrt{3}$ в цепную дробь.

В 1858 году был найден в курортном городке на Ниле древний папирус, его называют также Папирусом Ахмеса по имени писца, переписавшего его в 1650 году до н. э. Если Архимед жил в III веке до нашей эры, то папирус Ринда относится, как минимум, к XVII; ведь Ахмес был только переписчиком, а автор (или, скорее, авторы этого труда) неизвестен, но он жил еще раньше. В папирусе Ринда содержится удивительная формула для вычисления площади круга: $S=[(1-\frac{1}{9})D]^2$, где S - площадь, а D – диаметр круга. Формула дана в виде рецепта: «Возьми диаметр круга и отбрось его девятую долю; на остающемся построй квадрат». Здесь используются наилучшие рациональные приближения. Трудно сказать, однако, как египтяне нашли этот коэффициент. Его могли найти и просто подбором – что абсолютно исключено в случае приближений $\sqrt{3}$, найденных Архимедом.

Известно, что китайский астроном Цзу Чун-чжи (V в. н. э.) показал, что π заключено между 3,1415926 и 3,1415927. он указал в качестве рационального приближения к π величину $\frac{355}{113}$.

Из средневековых математиков близко подошёл к цепным дробям Омар Хайям. Он положил их в основу своей идеи реформы календаря. Продолжительность года по его приближениям составляла $365\frac{8}{33}$суток и составляла погрешность всего 19 секунд в год.

Но впервые цепные дроби как таковые появляются в «Алгебре» итальянского математика Рафаэль Бомбелли, вышедший в 1572 г. в статье, написанной в то время, когда в Италии и Франции впервые появились алгебраические понятия и обозначения. Бомбелли пришёл к цепным дробям, изучая извлечение квадратного корня из чисел. Первым известным использованием непрерывной дроби является приближённое выражение для $\sqrt{13}$ следующего вида $3+\frac{4}{6+\frac{4}{6}}$. Это частный случай формулы $\sqrt{a^2+b}=\ a+\frac{b}{2a+\frac{b}{2a+\cdots}}$.

Следующее по времени применение цепной дроби, причём опять-таки к извлечению квадратных корней принадлежит итальянскому математику Пьетро Антонио Катальди, им был предложен второй частный случай данной формулы: $\sqrt{18}=\frac{2}{8+\frac{2}{8+\frac{2}{8}}}$. В 1613 г. он ввёл при записи цепной дроби повторное применение дробной черты, т. е. уже настоящее обозначение цепной дроби, только вместо + он употреблял перлюэт (&), т. е. сокращённое обозначение латинского союза et (и). И его запись разложения $\sqrt{18}$ выглядела следующим образом: $\sqrt{18}$=4&$\frac{2}{8}$&$\frac{2}{8}$… Кроме разложения иррационального числа в ряд Катальди ещё и нашёл приближения этого числа: $\sqrt{18}=4+\frac{2}{8+\frac{1}{4}}$ и $\sqrt{18}=4+\frac{2}{8+\frac{8}{33}}$, между которыми заключён $\sqrt{18}$ (хотя он не знал способа последовательного вычисления подходящих дробей). При этом Катальди заметил, что значение цепной дроби всегда заключено между соседними подходящими дробями.

Катальди и Бомбелли пришли к цепным дробям, исходя из извлечения квадратного корня из чисел, а Даниель Швентер, немецкий математик, пришёл к цепным дробям путём приближённого представления обыкновенных дробей с большими числителями и знаменателями. Он раскладывал обыкновенную дробь в цепную, используя таблицу, с помощью весьма интересного способа. Таким образом, он нашёл рекуррентные соотношения для последовательного вычисления числителей и знаменателей подходящих дробей. Но при этом Швентер рассматривал только правильные дроби – дроби, числители которых все равны единице, а все знаменатели являются натуральными числами.

В середине XVII века английский математик Джон Валлис первым по времени разложил трансцендентное число $\frac{4}{\pi}$ в бесконечное произведение: $\frac{4}{\pi}=\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\frac{7\cdot 7}{6\cdot 8}\cdot\frac{9\cdot 9}{8\cdot 10}\ldots$, а У.

Броункер, первый президент Королевского общества, около 1659 г. без доказательства опубликовал разложение его в цепную дробь: $\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2+\frac{9}{2+\frac{25}{2+\cdots}}}$

Следующий шаг в развитии теории цепных дробей был сделан Христианом Гюйгенсом. Он строил модель солнечной системы с помощью набора зубчатых колес. По расчетам оказалось, что отношение числа зубцов $\frac{m}{n} \approx \frac{77708431}{2640858}$ двух каких-либо колёс должно быть равным отношению времён обращения двух планет вокруг Солнца. Это отношение выражается достаточно точно в виде (несократимой) дроби с большим числителем и большим знаменателем. Изготовление же таких зубчатых колёс, практически очень сложно. Тогда Гюйгенс нашёл среди дробей с меньшим числителем и меньшим знаменателем подходящую дробь к числу $\frac{77708431}{2640858}$. Как и Швентер, Гюйгенс решил эту задачу посредством разложения обыкновенной дроби в цепную дробь и поэтому ограничился рассмотрением правильных цепных дробей. Благодаря чему была найдена подходящая дробь $\frac{73}{51}$, аппроксимирующая дробь с большими числителем и знаменателем, и имеющая погрешность, которая составляет лишь десятитысячную долю от единицы. Гюйгенс обратил внимание на то, что нельзя найти обыкновенную дробь с меньшими числителем и знаменателем, чем подходящая, которая была бы ближе к значению цепной дроби; а также, что подходящие дроби попеременно то больше, то меньше значения цепной дроби.

Способы разложения цепных дробей на примерах

Алгоритм разложения вещественного числа на цепную дробь имеет вид:

$$a_0 = \lfloor x \rfloor, \quad x_0 = x - a_0$$
$$a_1 = \left\lfloor \frac{1}{x_0} \right\rfloor, \quad x_1 = \frac{1}{x_0} - a_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_i = \left\lfloor \frac{1}{x_{i-1}} \right\rfloor, \quad x_i = \frac{1}{x_{i-1}} - a_i$$

Если на 1-ом шаге x_i=0, то процесс останавливается. Цепная дробь принимает вид:

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\dots}}}$$

....

$$\cfrac{1}{a_{i-1}+\cfrac{1}{a_i}}$$

Пример 1. Построить цепную дробь для числа 26/9.

Преобразуем дробь в смешанное число: $\frac{26}{9} = 2\frac{8}{9}$

Отделим целую и дробную части и обозначим через a_0 и x_0, соответственно: $a_0 = 2$, $x_0 = \frac{8}{9}$. Перевернем дробную часть: $\frac{1}{x_0} = \frac{9}{8}$. Преобразуем дробь в смешанное число: $\frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$. Отделим целую и дробную части и обозначим через a_1 и x_1, соответственно: a_1=1, $x_1 = \frac{1}{8}$. Перевернем дробную часть: $\frac{1}{x_1}$ = 8. Отделим целую и дробную части и обозначим через a_2 и x_2, соответственно: $a_2 = 8$, $x_2 = 0$. Дробная часть равна нулю. Процедуру останавливаем.

Непрерывная (цепная) дробь имеет вид: $[a_0,a_1,a_2] = [2,1,8]$

Таким образом, исходную дробь можно представить в виде следующей цепной дроби: $[2,1,8] = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{8}}$

Пример 2. Разложить в цепную дробь:

$\frac{1355}{946} = 1 + \frac{409}{946} = 1 + \frac{946}{409} = 1 + 2 + \frac{128}{409} = 1 + 2 + \frac{1}{\frac{409}{128}} = 1 + 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{\frac{25}{128}}} = 1 + 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{\frac{128}{25}}} = 1 + 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{5+\frac{1}{\frac{3}{25}}}} = 1 + 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{5+\frac{1}{\frac{25}{3}}}} = 1 + 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{5+\frac{1}{8+\frac{1}{3}}}}$

Ответ: (1;2;3;5;8;3).

Пример 3. Построить цепную дробь для числа -4,76.

Если дробь с отрицательным знаком, то её нужно записать в виде суммы целой отрицательной части и положительной дроби.

Преобразуем дробь в смешанное число: $-\frac{476}{100} = -4\frac{19}{25} = -5+\frac{6}{25}$

Представим число в виде суммы целой и дробной частей и обозначим через a_0 и x_0, соответственно: $a_0 = -5$, $x_0 = \frac{6}{25}$

Перевернем дробную часть: $\frac{1}{x_0} = \frac{6}{25}$

Преобразуем дробь в смешанное число: $\frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$

Отделим целую и дробную части и обозначим через a_1 и x_1, соответственно:

Перевернем дробную часть: $\frac{1}{x_1} = \frac{6}{1}$

Преобразуем дробь в смешанное число: $\frac{6}{1} = 6$

Дробная часть равна нулю. Процедуру останавливаем.

Непрерывная (цепная) дробь имеет вид: $[a_0, a_1, a_2] = [-5,1,6]$

Таким образом исходный дробь можно представить в виде следующей цепной дроби: $[-5,1,6] = -5 + \frac{1}{1+\frac{1}{6}}$

Цепные дроби вокруг нас

Проектировщикам зубчатых колес хорошо знакома такая задача. Предположим, требуется сконструировать зубчатую передачу из двух шестерёнок с отношением угловых скоростей вращения, близким к $\sqrt{2}$. Поскольку это число иррационально, то никаким конечным количеством зубьев на шестернях нельзя добиться того, чтобы коэффициент передачи равнялся ему в точности. Это можно сделать лишь с большей или меньшей степенью приближения. В принципе, увеличивая число зубьев как на одной , так и на другой шестеренке, можно добиться сколь угодного хорошего приближения коэффициента передачи к числу $\sqrt{2}$. Однако, рост количества зубьев ведет к уменьшению их размеров и, следовательно к потере прочности.

Возникает вопрос: нельзя ли подобрать такие количества m и n зубьев на шестеренках, чтобы отношение m/n хорошо приближало $\sqrt{2}$ и вместе тем, чтобы числа m и n были сравнительно небольшими? В этом случае применяются цепные дроби.

Подходящие дроби и их вычисление

Если в непрерывной дроби возьмём несколько звеньев с начала, отбросив все остальные, и составленную ими непрерывную дробь обратить в обыкновенную, то получим так называемую **подходящую дробь**. Первая походящая дробь получится, когда возьмём одно первое звено; вторая – когда возьмём два первых звена, и т.д.

Покажем на примере: $\frac{239}{99}$

Сначала разложу в цепную дробь и найдём подходящую дробь:

$\frac{239}{99}=2+\frac{41}{99}=2+\frac{1}{\frac{99}{41}}=2+\frac{1}{2+\frac{17}{41}}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{41}{17}}}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{7}{17}}}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{17}{7}}}}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{3}{7}}}}=2+$

$\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}}}$

Например, возьмём 3 звена. $2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=2+\frac{1}{\frac{5}{2}}=2{,}4$

Имеем 2,4.

Если берём 4 звена, то: $2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{1}{2}}}}=2+\frac{1}{2{,}4}=2\frac{5}{12}\approx 2{,}4166$

Если берём 6 звеньев, то имеем 2,414141.

Извлечение квадратного корня

Пусть требуется найти $\sqrt{41}$ при помощи цепных дробей. Рассуждаем так:

наибольшее целое число, заключающееся в $\sqrt{41}$,есть 6; поэтому можем положить: $\sqrt{41}=6+\frac{1}{x}$, откуда: $\frac{1}{x}=\sqrt{41}-6$; x = $\frac{1}{\sqrt{41}-6}=\frac{\sqrt{41}+6}{5}$; (1)

Так как $\sqrt{41}+6$ равняется 12 с дробью, то наибольшее число, заключающееся в $\frac{\sqrt{41}+6}{5}$ есть 2; поэтому можем положить:

x = $\frac{\sqrt{41}+6}{5}=2+\frac{1}{y}$, откуда: $\frac{1}{y}=\frac{\sqrt{41}+6}{5}-2=\frac{\sqrt{41}-4}{5}$; (2)

y = $\frac{5}{\sqrt{41}-4}=\frac{5(\sqrt{41}+4)}{25}=\frac{\sqrt{41}+4}{5}$.

Так как $\sqrt{41}+4$ равняется 10 с дробью, то и наибольшее целое число, заключающее в $\frac{\sqrt{41}+4}{5}$, есть 2; поэтому можем положить:

y = $\frac{\sqrt{41}+4}{5}=2+\frac{1}{z}$, (3)

откуда: $\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{41}-6}{5}$; z = $\frac{5}{\sqrt{41}-6}=\frac{5(\sqrt{41}+6)}{5}=\sqrt{41}+6$.

Наибольшее целое число, заключающееся в $\sqrt{41}+6$, есть 12; поэтому можем положить: z = $\sqrt{41}+6=12+\frac{1}{v}$, (4)

откуда: $\frac{1}{v}=\sqrt{41}-6$; v = $\frac{1}{\sqrt{41}-6}$.

Сравнивая формулу для v с формулой для x, находим, что v=x.

Пользуясь равенствами (1), (2),(3), и (4), получим:

$\sqrt{41} = 6 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{12+\frac{1}{x}}}} = 6 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{12+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{12+\cdots}}}}}} \approx 6{,}4032$ – если возьмём 4 звена

Для извлечения квадратного корня с применением цепных дробей имеется более лёгкая формула Рафаэля Бомбелли:

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a+\frac{b}{2a+\cdots}}$$

$\sqrt{41} = \sqrt{6^2+5} = 6 + \frac{5}{12+\frac{5}{12+\frac{5}{12}}} = 6 + \frac{5}{12+\frac{5}{12+\frac{5}{\frac{149}{12}}}} = 6 + \frac{5}{12+\frac{5}{12+\frac{60}{149}}} = 6{,}4026$

$\sqrt{2} = \sqrt{1^2+1} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}} = 1{,}\ 41$

$\sqrt{21} = \sqrt{4^2+5} = \sqrt{16+5} = 4 + \frac{5}{8+\frac{5}{8}} = 4{,}\ 57971$

Вывод: первый способ даёт меньшую погрешность.

Календарь и подходящие дроби

Древнеримские жрецы, ведавшие исчислением времени, произвольно удлиняли некоторые года, чтобы согласовать календарные даты с сезонными явлениями природы. Впервые порядок в счете времени навел в I в. до нашей эры римский император Юлий Цезарь. Он постановил считать одни годы по 365 суток, а другие по 366 суток, чередуя их по правилу три года подряд коротких, четвертый – длинный. Гораздо позже, с введением христианского летоисчисления, високосным стали считать каждый год, порядковый номер которого делится на 4. Этот календарь в честь Юлия Цезаря называется юлианским. По нему продолжительность суток составляет 365 суток 6 ч, что больше истинной лишь на 11 мин 14 с. Однако и это решение оказалось неудовлетворительным. К XVI в. ошибка, накапливаясь, составила уже около 10 суток.

Следующую реформу календаря провел Григорий XIII – папа римский. Было решено: сдвинуть числа на 10 дней, оставить чередование простых и високосных лет, при этом, если порядковый номер года оканчивается двумя нулями, но число сотен не делится на 4, то этот год простой. В настоящее время расхождение между юлианским и новым, григорианским календарями составляет 13 дней, поскольку с тех пор накопилось еще три дня (в 1700, 1800 и 1900 гг.). Продолжительность григорианского года составляет 365, 2425 суток, т.е. 365 суток 5 ч 49 мин 12 с, т.е. она больше истинной лишь на 26с. Полученная точность очень велика и вполне достаточна для практических нужд.

Интересная система календаря была предложена среднеазиатским математиком и поэтом Омаром Хайямом (ок.1048-1122), по ней високосными годами должны были считаться 8 лет из каждых 33. Продолжительность года по О. Хайяму составляет 365 суток, его погрешность всего 19с в год.

В 1864 г. русский астроном И. Медлер предложил с XX столетия ввести в России следующую поправку к юлианскому календарю: через каждые 128 лет пропускать один високосный год из 32, которые выпадают на этот период. Этот календарь самый точный из всех перечисленных. Здесь погрешность сокращается всего до 1с. Однако календарь И. Медлера не был принят, видимо, из-за того, что период в 128 лет не является «круглым» числом.

Системы календаря оказываются связанными с записью астрономического года в виде цепной дроби.

Год продолжительностью 365 суток - это нулевая подходящая дробь этой цепной дроби, 365 - юлианский год – первая подходящая дробь, 365, 365 и 365 - вторая, третья и четвертая подходящие дроби.

Системой, соответствующей второй подходящей дроби: семь високосных лет из 29, никто не предложил воспользоваться, видимо, потому, что третья подходящая дробь не намного сложнее, а точность ее гораздо больше (вспомним, что это система О. Хайяма), а четвертой подходящей дроби соответствует система И. Медлера.

Подсчитаем подходящие дроби для дробной части этого числа:

$$\frac{1}{4};\frac{7}{29};\frac{8}{33};\frac{31}{128};\frac{132}{545}\ldots.$$

Первая дробь означает, что раз в 4 года надо добавлять лишний день; этот принцип лёг в основу юлианского календаря. При этом ошибка в 1 день накапливается за 128 лет. Второе значение (7/29) никогда не использовалось, поскольку оно мало отличается от следующего, гораздо более точного. Третья дробь (8/33), то есть 8 високосных лет за период в 33 года, была предложена Омаром Хайямом в XI веке и положила начало персидскому календарю, в котором ошибка в день накапливается за 4500 лет (в григорианском - за 3280 лет). Очень точный вариант с четвёртой дробью (31/128, ошибка в сутки накапливается только за 100000 лет) пропагандировал немецкий астроном Иоганн фон Медлер (1864 год), однако большого интереса он не вызвал.

Решение задач с использованием цепных дробей

1) Решить уравнение в целых положительных числах

$$x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{41}{7}$$

Решение

Любое число единственным образом представляется в виде суммы двух чисел, одно из которых — целое, а другое — неотрицательно и меньше единицы. Это — сумма его целой и дробной части. Для $\frac{41}{7}$ таким представлением будет $\frac{41}{7}=5\frac{6}{7}$. Поэтому x=5, $y+\frac{1}{z}=\frac{7}{6}$. Аналогично разлагаем $\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$ в сумму целой и дробной части.

$\frac{41}{7}=5\frac{6}{7}=5+\frac{1}{\frac{7}{6}}=5+\frac{1}{1+\frac{1}{6}}$

Получаем y=1, z=6.

Ответ: (5,1,6).

2) Решить уравнение в целых числах: $\frac{1}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}}=\frac{7}{17}$

1 случай:

$x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{17}{7}=2+\frac{3}{7}$

$x=2;\ y+\frac{1}{z}=\frac{7}{3}=2+\frac{1}{3}$

y= 2; z=3

2 случай:

$x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{17}{7}=3-\frac{4}{7}$

$x=3;\ y+\frac{1}{z}=-\frac{7}{4}=-2+\frac{1}{4}$

y= -2; z= 4

Ответ: (2,2,3), (3,-2,4).

3) Обратить следующую простую дробь в цепную:

Каждый раз деля столбиком, мы записываем целую часть, а остаток в виде дроби с числителем 1 переворачиваем.

$$\frac{a^4+2a^2+1}{a^3+a+1}=a+\frac{1}{\frac{a^3+a-1}{a^2+a+1}}=a+\frac{1}{(a-1)+\frac{1}{\frac{a^2+a+1}{a}}}=a+\frac{1}{(a-1)+\frac{1}{(a+1)+\frac{1}{a}}}$$

Ответ: (a; a-1; a+1; a).

4) Нахождение решения неопределённого уравнения в целых числах, используя цепные дроби:

43x + 15y = 8

$$\frac{43}{15}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{6+\frac{1}{2}}}$$

$$2+\frac{1}{1+\frac{1}{6}}=2+\frac{1}{\frac{7}{6}}=2\frac{6}{7}=\frac{20}{7}$$

$$\frac{43}{15} - \frac{20}{7} = \frac{43 \cdot 7 - 15 \cdot 20}{15 \cdot 7} = \frac{301 - 300}{105} = \frac{1}{105}$$

$43 \cdot 7 - 15 \cdot 20 = 1 \mid \cdot 8$

$43 \cdot 56 + 15 \cdot (-160) = 8$

$x = 56;\ y = -160$

$x = 56 - 15t,\ y = -160 + 43t;$

Ответ: $(56 - 15t; -160 + 43t)$, где t – любое число.

5) Разложить уравнение в непрерывную дробь и вычислить приближённые корни:

$x^3 - 2x - 5 = 0$

Каждый раз делим остаток от деления многочлена $(x^3 - 2x - 5)$ на $(x - 2)$ получаем:

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 2x - 5 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-x^3 - 2x^2 & \mathbf{x^2 + 2x + 2} \\ \cline{1-1}
\quad 2x^2 - 2x & \\
\quad -2x^2 - 4x & \\ \cline{1-1}
\qquad 2x - 5 & \\
\qquad -2x - 4 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad \mathbf{-1} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^2 + 2x + 2 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-2x^2 - 2x & \mathbf{x + 4} \\ \cline{1-1}
\quad 4x + 2 & \\
\quad -4x - 8 & \\ \cline{1-1}
\qquad \mathbf{10} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
x + 4 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-x - 2 & \mathbf{1} \\ \cline{1-1}
\quad \mathbf{6} &
\end{array}$$

$x^3 - 2x - 5 = (x^2 + 2x + 2)(x - 2) + (-1)$

$1 \cdot (x - 2)^3 + 6 \cdot (x - 2)^2 + 10 \cdot (x - 2)^1 - 1 \cdot (x - 2)^0 = 0$

$x \approx 2$

Замена: $x - 2 = \frac{1}{y};\ (\frac{1}{y})^3 + 6 \cdot (\frac{1}{y})^2 + 10 \cdot (\frac{1}{y}) - 1 = 0 \mid \cdot (-y^3)$

$y^3 - 10y^2 + 6y - 1 = 0$

Каждый раз делим остаток от деления многочлена ($y^3 – 10y^2 + 6y – 1$) на (y - 10) получаем:

$y^3 – 10y^2 + 6y - 1$	$y - 10$
$-y^3 – 10y^2$	$\mathbf{y^2 + 6}$
$6y - 1$	
$-6y - 60$	
59	

$y^2 + 6$	$y - 10$
$-y^2 – 10y$	$\mathbf{y + 10}$
$10y + 6$	
$-10y - 100$	
106	

$y + 10$	$y - 10$
$-y - 10$	**1**
20	

$1 \cdot (y – 10)^3 + 20 \cdot (y – 10)^2 + 106\,(y – 10) + 59 = 0;$

Замена: $y – 10 = t$

$(\frac{1}{t})^3 + 20 \cdot (\frac{1}{t})^2 + 106 \cdot \frac{1}{t} + 59 = 0 \mid \cdot t^3$

$59t^3 + 106t^2 + 20t + 1 = 0$

$t \approx 1$

Ответ: (2; 1; 1 …)

Заключение

Поставленные цель и задачи в данной работе достигнуты.

Изучение части обширной темы «Цепные дроби» дают возможность извлекать квадратичные корни с применением цепных дробей, решать некоторые задачи повышенной сложности, решать уравнения в целых числах, записывать положительные и отрицательные дроби в виде цепных дробей.

В процессе работы были рассмотрены:

- цепные дроби;

- подходящие дроби;

- извлечение квадратного корня;

- решение уравнений с применением цепных дробей.

Список литературы

1.Сборник алгебраических задач для средней школы (часть вторая) Н.А. Шапошников, Н.К. Вальцов 1936 г.

2.Справочник по математике для средней школы А.Г. Цыпкин 1981 г.

3.Учебник по алгебре для 8-10 классов средней школы (вторая часть) А.П. Киселёв 1962 г.

4.Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика / Глав. ред. М. Д. Аксёнова

5.https://ru.wikipedia.org/wiki/Непрерывная_дробь

6.edu.alnam.ru › book_mav

7.https://matworld.ru/calculator/nepreryvnaja-drob.php

8.http://matica.org.ua

9.http://scask.ru/g_book_mav.php?id=125